

Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Виталия Лазаревича Гинзбурга
29 января 2017 г.

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

- | | |
|---|--|
| <p>а) Зимой в Нижнем Новгороде Солнце восходит (по сравнению с летом):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) севернее; 2) южнее; 3) восточнее; 4) в той же точке горизонта? | <p>б) Яркие звёзды созвездия Кассиопея образуют фигуру типа буквы:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) С; 2) F; 3) T; 4) W? |
| <p>в) Самая близкая к Солнцу звезда находится в созвездии:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Кита; 2) Лебедя; 3) Ориона; 4) Центавра? | <p>г) Какой из объектов не является звездой:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Вега; 2) Денеб; 3) Сириус; 4) Седна? |
| <p>д) Сколько ярких звёзд образуют ковш (вместе с ручкой) созвездия Большая Медведица:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) пять; 2) семь; 3) девять; 4) одиннадцать? | <p>е) В Нижнем Новгороде планета Юпитер:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) видна невооружённым глазом; 2) видна уже в простой бинокль; 3) видна только с помощью телескопа; 4) никогда не доступна наблюдению (всегда находится ниже горизонта)? |
- ж) Астрономические знания в Древней Греции не позволяли:
- 1) построить календарь;
 - 2) определить расстояние до Солнца;
 - 3) предсказать приливы;
 - 4) исследовать форму Земли?

2. Во сколько раз отличаются наибольшее и наименьшее возможные значения видимого углового диаметра Венеры, если радиус её орбиты 0,7 астрономических единицы? Орбиты планет в Солнечной системе считать круговыми.

3. Солнечная система перемещается в плоскости диска нашей галактики Млечный путь. Пусть её путь пересекает шаровое звёздное скопление (например, движущееся в гало перпендикулярно плоскости Млечного пути), так что Солнце проходит через центр скопления. Определите среднее количество звёзд скопления, которые пройдут на расстоянии меньше 30 а. е. от Солнца, т. е. могут оказаться внутри орбиты Нептуна. В скоплении 2 млн. звёзд, которые распределены однородно в пространстве (без сгущений), радиус скопления 25 пк, где 1 пк = 200 тыс. а. е. Скорость относительного движения Солнца и шарового скопления существенно выше скорости вращения звёзд внутри скопления. Объём шара с радиусом r равен $4\pi r^3/3$, площадь круга того же радиуса — πr^2 .

4. Определите, во сколько раз радиус Луны r меньше радиуса Земли R , используя длительности фаз полного лунного затмения. Максимальное время t от начала погружения Луны в зону полной тени Земли до полного выхода спутника из указанной зоны составля-

ет примерно 4,0 часа (именно эта часть затмения хорошо заметна невооружённым глазом в отличие от прохождения Луны в зоне полутени Земли). В свою очередь, весь диск Луны находится целиком внутри полной тени Земли не дольше отрезка $\Delta\tau = 1 \text{ ч } 50 \text{ мин}$. При расчёте принять видимые угловые диаметры Солнца и Луны одинаковыми.

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

- а) В полночь на земном экваторе Полярную звезду можно найти:
- 1) на горизонте;
 - 2) на высоте $23,5^\circ$ над горизонтом;
 - 3) на высоте $76,5^\circ$ над горизонтом;
 - 4) в зените (вертикально вверх)?
- б) Температура видимой поверхности Солнца примерно:
- 1) 600 К;
 - 2) 6 000 К;
 - 3) 60 000 К;
 - 4) 600 000 К?
- в) Гравитационные волны были впервые зарегистрированы в 2015–2016 гг. с помощью:
- 1) больших наземных телескопов VLT;
 - 2) интерферометра LIGO;
 - 3) орбитального телескопа «Кеплер»;
 - 4) спутников GPS—ГЛОНАСС?
- г) Радиоволны какого диапазона используются для связи с Международной космической станцией:
- 1) сверхдлинноволнового;
 - 2) длинноволнового;
 - 3) средневолнового;
 - 4) коротковолнового;
 - 5) ультракоротковолнового?
- д) Радиусы двух звёзд отличаются в 2 раза, тогда их объёмы отличаются примерно:
- 1) в 1,5 раза;
 - 2) в 2 раза;
 - 3) в 4 раза;
 - 4) в 8 раз?
- е) Сила земного тяготения (для тел одной и той же массы) уменьшается в 4 раза на высоте примерно:
- 1) 6,4 км;
 - 2) 64 км;
 - 3) 640 км;
 - 4) 6 400 км?
- ж) Скорость кометы при движении из наиболее удалённой в наиболее близкую к Солнцу точку:
- 1) монотонно уменьшается;
 - 2) сначала уменьшается, потом возрастает;
 - 3) монотонно увеличивается;
 - 4) сначала возрастает, потом уменьшается;
 - 5) не изменяется?

2. На закате дня весеннего равноденствия перед пилотом воздушного шара поставлена задача подниматься в районе экватора таким образом, чтобы в течение всего подъёма видеть заходящее Солнце касающимся горизонта.

а) С каким вертикальным ускорением будет подниматься воздушный шар? (5 баллов)

б) Сколько времени займёт подъём в таком режиме до высоты 5 км и какой вертикальной скорости достигнет шар на указанной высоте 5 км? (2 балла)

Для расчётов принять радиус Земли $R_3 = 6\,400$ км.

3. Определите ускорение свободного падения на видимой поверхности Солнца, если Земля обращается вокруг светила за один год по орбите с радиусом 150 млн км, а видимый угловой диаметр Солнца $0,53$ градуса.

4. При термоядерном взрыве сверхновая звезда сбросила сферическую оболочку. Какую долю исходной массы звезды должна составлять оболочка, чтобы оставшееся ядро звезды не смогло удержать существовавшую до взрыва планетную систему? Взрыв происходит практически мгновенно по сравнению с периодом обращения планет вокруг звезды. Планеты расположены на достаточно удалённых круговых орбитах по сравнению с ради-

усом звезды, так что попавшим на них веществом оболочки можно пренебречь.

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

- | | |
|---|--|
| <p>а) К какому классу звёзд принадлежит Солнце:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) белый карлик; 2) жёлтый карлик; 3) коричневый карлик; 4) красный карлик? | <p>б) Кольца Сатурна в основном состоят:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) из силикатной пыли; 2) из минеральных камней; 3) из водяного льда; 4) из метанового льда? |
| <p>в) Второй по распространённости элемент во Вселенной:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) водород; 2) гелий; 3) кислород; 3) углерод? | <p>г) Первой была придумана оптическая схема телескопа:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Галилея; 2) Кассегрена; 3) Коперника; 4) Ломоносова? |
| <p>д) В атмосфере какой из планет Солнечной системы наблюдается самый крупный циклон:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Венера; 2) Земля; 3) Сатурн; 4) Юпитер? | <p>е) Сигнал от радиопередатчика на Земле распространяется до Луны и обратно в приёмник на Земле примерно:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) за 2,5 микросекунды; 2) за 2,5 миллисекунды; 3) за 2,5 секунды; 4) за 2,5 минуты? |
- ж) Какое излучение наименее всего поглощается атмосферой Земли:
- 1) инфракрасное;
 - 2) оптическое;
 - 3) ультрафиолетовое;
 - 4) рентгеновское?

2. Что больше и во сколько раз: сила давления так называемого быстрого солнечного ветра или сила давления излучения Солнца, которые действуют на плоскую зеркальную пластину, упруго отражающую частицы ветра? Солнечный ветер представляет собой поток протонов с массой $1,7 \cdot 10^{-27}$ кг и существенно более лёгких электронов, уходящих из короны Солнца в межпланетное пространство. На орбите Земли скорость ветра составляет примерно 700 км/с, его концентрация — 4 млн протонов в одном куб. м, а плотность потока энергии солнечного излучения (энергия, переносимая за единицу времени сквозь единицу площади) — 1 400 Вт/м². Импульс фотона $p_{\text{ф}}$ связан с его энергией $\varepsilon_{\text{ф}}$ соотношением $p_{\text{ф}} = \varepsilon_{\text{ф}}/c$, где $c = 300$ тыс. км/с — скорость света.

3. Тёмная энергия представляет собой некоторую форму материи (субстанцию), которая однородно заполняет всё пространство и способствует увеличению скорости расширения Вселенной. При определённых условиях, действие тёмной энергии может быть описано так, будто тела помещены в дополнительное гравитационное поле, в котором ускорение свободного падения \vec{g}_s направлено от некоторого центра \vec{r}_0 и линейно увеличивается по мере удаления от этого центра — начала отсчёта: $\vec{g}_s = [8\pi G\Lambda/(3c^2)](\vec{r} - \vec{r}_0)$, где \vec{r} — положение частицы, $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²) — гравитационная постоянная, $\Lambda = 6 \cdot 10^{-10}$ Дж/м³ — космологическая постоянная (плотность тёмной энергии), $c = 300$ тыс. км/с — скорость света.

- а) Покажите, что «гравитационное» поле тёмной энергии создаёт относительное уско-

рение двух тел (разность их ускорений), которое не зависит от выбора точки \vec{r}_0 — начала отсчёта (1 балл).

б) При каких расстояниях между двумя атомами водорода их взаимное гравитационное притяжение превышает отталкивание тёмной энергией (всеми электрическими силами пренебречь)? Иными словами, два неподвижных относительно друг друга атома водорода в дальнейшем сближались бы между собой на таких расстояниях (в отсутствие других атомов; 3 балла).

в) Найдите максимальный радиус атома водорода: при каких расстояниях между неподвижными электроном и протоном эти частицы начали бы сближаться за счёт взаимного электрического притяжения при наличии расталкивания частиц тёмной материей? (3 балла.)

Элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, константа в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, масса протона (ядра атома водорода) $1,7 \cdot 10^{-27}$ кг примерно в 1800 раз больше массы электрона.

4. Оцените максимальную массу чёрной дыры, которая разорвала бы Солнце приливными силами ещё до того, как последнее достигло бы так называемого горизонта событий при свободном радиальном падении в чёрную дыру. Искомую массу чёрной дыры выразите в массах Солнца. Гравитационное поле чёрной дыры вплоть до горизонта событий считайте совпадающим с полем точечного тела. Радиус горизонта событий вокруг чёрной дыры с массой M равен $2GM/c^2$, где $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²) — гравитационная постоянная, $c = 300$ тыс. км/с — скорость света. Масса Солнца составляет $2 \cdot 10^{30}$ кг, его радиус — 700 тыс. км.

1. а) 2) Южнее.
- б) 4) W.
- в) 4) Центавра.
- г) 4) Седна.
- д) 2) Семь.
- е) 1) Виден невооружённым глазом.
- ж) 2) Не позволяли определить расстояние до Солнца.

2. В 5,7 раза.

Видимый угловой диаметр планеты обратно пропорционален расстоянию от Земли до Венеры. Указанное расстояние изменяется от минимального значения $R_З - R_В$ до $R_З + R_В$, где $R_З = 1$ а. е. и $R_В = 0,7$ а. е. — радиусы орбит Земли и Венеры соответственно. Следовательно, отношение максимального и минимального значений видимого углового диаметра составляет $(R_З + R_В)/(R_З - R_В) = (1 + 0,7)/(1 - 0,7) \approx 5,7$. Необходимо отметить, что Венера находится близко к солнечному диску на небосводе в моменты прохождения на минимальном и максимальном расстояниях от Земли — так называемые нижнее и верхнее соединения планеты с Солнцем. Поэтому наблюдение планеты в этих случаях затруднено. Нижнее соединение может сопровождаться прохождением Венеры по диску Солнца.

3. Среднее число $1,1 \cdot 10^{-4}$.

При рассмотрении относительного движения, примем шаровое скопление неподвижным, так что Солнце проходит сквозь него. Длина прямолинейной траектории Солнца внутри скопления равна диаметру скопления $L = 2R$, где $R = 25$ пк = $25 \cdot 200\,000$ а. е. = $5 \cdot 10^6$ а. е. — соответствующий радиус. Точки пространства, находящиеся на расстоянии меньше длины $r = 30$ а. е. от траектории Солнца, заполняют собой внутреннюю область цилиндра с высотой L и радиусом основания r . Число n звёзд внутри указанного цилиндра меньше числа $N = 2 \cdot 10^6$ звёзд в скоплении во столько раз, во сколько объём скопления $4\pi R^3/3$ больше объёма цилиндра $\pi r^2 L = 2\pi r^2 R$. Таким образом, искомое среднее число

$$n = N \frac{2\pi r^2 R}{4\pi R^3/3} = N \frac{3r^2}{2R^2} = 2 \cdot 10^6 \frac{3 \cdot (30 \text{ а. е.})^2}{2(5 \cdot 10^6 \text{ а. е.})^2} = 1,1 \cdot 10^{-4}.$$

Полученное число меньше единицы имеет смысл вероятности прохождения какой-либо звезды на расстоянии меньше 30 а. е. от Солнца при «столкновении» с одним шаровым скоплением.

4. В 3,7 раза.

Если бы все лучи Солнца шли строго параллельно друг другу, то тень Земли представляла бы собой цилиндр с диаметром, равным диаметром Земли $2R$. Отличный от нуля угловой размер Солнца приводит к размытию границы тени Земли в так называемую полутень, которая расширяется по мере перемещения от Земли к Луне и на орбите Луны достигает ширины $w \approx L\theta$, где L — расстояние от Земли до Луны, θ — видимый угловой диаметр Солнца. В результате на орбите Луны полная тень Земли сужается до диаметра $d = 2R - w$. Вместе с тем в силу совпадения видимых угловых диаметров θ Солнца и Луны ширина полутени $w \approx L\theta$ оказывается равной диаметру Луны $2r$, поэтому диаметр полной тени $d = 2R - 2r$. От начала погружения в полную тень Земли до полного

выхода из неё Луна проходит указанное расстояние d , увеличенное на диаметр Луны $2r$. В свою очередь, Луна находится целиком внутри полной тени Земли на трассе длины d , уменьшенной на диаметр Луны $2r$. Луна движется с постоянной скоростью сквозь область тени Земли, поэтому длины отмеченных трасс $d + 2r$ и $d - 2r$ пропорциональны указанным в условии задачи длительностям соответствующих фаз лунного затмения $t = 4,0$ ч и $\Delta\tau = 1$ ч 50 мин $\approx 1,83$ ч. В результате получаем уравнение

$$\frac{d - 2r}{d + 2r} = \frac{(2R - 2r) - 2r}{(2R - 2r) + 2r} = \frac{2R - 4r}{2R} = 1 - \frac{2r}{R} = \frac{\Delta\tau}{t},$$

из которого определяем искомое отношение радиусов

$$\frac{R}{r} = \frac{2}{1 - \Delta\tau/t} = \frac{2}{1 - (1,83 \text{ ч})/(4,0 \text{ ч})} = 3,7.$$

Решение задач 10 класса

1. а) 1) На горизонте.
- б) 2) 6 000 К.
- в) 2) Интерферометра LIGO.
- г) 5) Ультракоротковолнового.
- д) 4) В 8 раз.
- е) 4) 6 400 км (одного радиуса Земли).
- ж) 3) Монотонно увеличивается.

2. а) Ускорение шара 3,4 м/с². б) Время подъёма 9,0 мин, а скорость 18 м/с.

а) При требуемом режиме подъёма, шар находится на солнечном луче, который исходит из нижней точки диска Солнца и касается поверхности Земли. Рассмотрим прямоугольный треугольник, один из катетов которого образован указанным лучом в части отрезка от точки касания Земли до воздушного шара. Второй катет соединяет точку касания луча и центр Земли, так что длина этого катета постоянна и равна радиусу Земли $R_3 = 6\,400$ км. В свою очередь, угол θ между последним катетом и гипотенузой монотонно увеличивается во времени как угол поворота Земли вокруг своей оси: $\theta = 2\pi t/T = \omega t$, где период $T = 1$ сут $= 24 \cdot 60 \cdot 60$ с $= 86\,400$ с, а соответствующая круговая частота $\omega = 2\pi/T$. В таком случае длина l гипотенузы (отрезка центр Земли—воздушный шар) равна $R_3/\cos(\omega t)$, а искомая высота подъёма шара

$$h = l - R_3 = R_3 \left[\frac{1}{\cos(\omega t)} - 1 \right] = 2R_3 \frac{\sin^2(\omega t/2)}{\cos(\omega t)} \approx 2R_3 (\omega t/2)^2 = R_3 \omega^2 t^2/2.$$

В последней серии преобразований использованы приближённые равенства $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\cos \alpha \approx 1$ для малых значений аргумента $\alpha \ll 1$. Таким образом, высота h подъёма шара зависит от времени, как при равноускоренном движении с ускорением

$$a = R_3 \omega^2 = (6\,400 \cdot 1\,000 \text{ м}) (2\pi/86\,400 \text{ с})^2 = 0,034 \text{ м/с}^2 = 3,4 \text{ см/с}^2.$$

б) Указанная в условии задачи высота $h = 5$ км достигается за время

$$t = \sqrt{\frac{2h}{R_3}} / \omega = \frac{86\,400 \text{ с}}{2\pi} \sqrt{(2 \cdot 5 \text{ км})/6\,400 \text{ км}} \approx 540 \text{ с} = 9,0 \text{ мин.}$$

На данной высоте шар достигает скорости

$$v = at = \omega \sqrt{2hR_3} = \frac{2\pi}{86\,400 \text{ с}} \sqrt{2 \cdot 5 \text{ км} \cdot 6\,400 \text{ км}} \approx 0,018 \text{ км/с} = 18 \text{ м/с.}$$

3. 280 м/с².

Центростремительное ускорение Земли при круговом движении вокруг Солнца v^2/R равно ускорению свободного падения g_3 в гравитационном поле светила на орбите Земли, где $v = 2\pi R/T$ — скорость Земли, $R = 150 \cdot 10^6$ км — радиус орбиты Земли, период $T = 1$ год $= 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ с $= 3,15 \cdot 10^7$ с. Ускорение свободного падения на поверхности Солнца больше ускорения g_3 во столько раз, во сколько квадрат радиуса R земной орбиты больше радиуса Солнца R_C . Но отношение диаметра Солнца $2R_C$ к расстоянию R до него

совпадает с видимым угловым диаметром светила $\theta = 2R_C/R = 0,53^\circ = (0,53/180)\pi$ рад. Тогда находим искомое ускорение свободного падения на поверхности Солнца

$$g_C = g_3 (R/R_C)^2 = g_3 (2/\theta)^2 = (v^2/R) (2/\theta)^2 = \frac{(2\pi R/T)^2}{R} (2/\theta)^2 = 16\pi^2 R/(\theta T)^2 = \\ = \frac{16\pi^2 (150 \cdot 10^6 \text{ км})}{[(0,53/180)\pi \cdot 3,15 \cdot 10^7 \text{ с}]^2} = 0,28 \text{ км/с}^2 = 280 \text{ м/с}^2.$$

4. Больше 50 %.

До взрыва сверхновой, центростремительное ускорение v^2/r планеты на круговой орбите с радиусом r равно ускорению свободного падения $g = GM_0/r^2$, создаваемого центральной звездой с начальной массой M_0 , что определяет орбитальную скорость планеты $v = \sqrt{GM_0/r}$; здесь G — гравитационная постоянная. За короткое время прохождения сброшенной оболочки с массой ΔM через планетную систему скорость и положение звезды не меняются. Вместе с тем оставшееся после взрыва ядро звезды не приобретает дополнительной скорости вследствие сферической симметрии оболочки. Потенциальная энергия планеты изменяется пропорционально изменению массы звезды, так что после прохождения оболочки механическая энергия планеты с массой $m_{\text{пл}}$ приобретает значение

$$W = m_{\text{пл}} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{G(M_0 - \Delta M)}{r} \right) = m_{\text{пл}} \left(\frac{GM_0}{2r} - \frac{G(M_0 - \Delta M)}{r} \right) = Gm_{\text{пл}} \frac{2\Delta M - M_0}{2r}.$$

Сила тяготения звезды не удержит планету от убегания, если механическая энергия W станет положительной (кинетическая энергия превысит потенциальную энергию), чему соответствует масса сброшенной оболочки $\Delta M \geq M_0/2$. Таким образом, оставшееся после взрыва ядро звезды потеряет планетную систему, если масса сброшенной оболочки превышает 50 % массы звезды до взрыва M_0 .

Решение задач 11 класса

1. а) 2) Жёлтый карлик.
- б) 3) Из водяного льда.
- в) 2) Гелий.
- г) 1) Галилея.
- д) 4) Юпитер.
- е) 3) За 2,5 секунды.
- ж) 2) Оптическое.

2. Давление излучения больше в 1 400 раз.

Силы со стороны солнечного излучения и ветра $F_{\text{изл}}$ и $F_{\text{вет}}$ пропорциональны площади пластины S . Поэтому отношение указанных сил $F_{\text{изл}}$ и $F_{\text{вет}}$ совпадает с отношением давлений $P_{\text{изл}} = F_{\text{изл}}/S$ и $P_{\text{вет}} = F_{\text{вет}}/S$ — сил, действующих на единицу площади поверхности.

При отражении от пластины импульс p частицы (протона или фотона) меняется на противоположный. Поэтому частица передаёт пластине импульс $2p$. Соответственно, N частиц передают пластине импульс $2pN$, так что на пластину действует давление

$$P = \frac{F}{S} = \frac{2pN/t}{S} = 2pJ, \quad (1)$$

где t — время, за которое N частиц определённого типа (протоны или электроны) отразились от пластины, а величина $J = N/(St)$ представляет собой плотность потока частиц — число частиц, попадающих на единицу площади поверхности за единицу времени.

Для фотонов с импульсом $p_{\text{ф}} = \varepsilon_{\text{ф}}/c$ выражение для давления излучения принимает вид

$$P_{\text{изл}} = 2\varepsilon_{\text{ф}}J/c = 2Q_{\text{ф}}/c = 2 \frac{1\,400 \text{ Вт/м}^2}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 9,3 \cdot 10^{-6} \text{ Па}, \quad (2)$$

где $Q_{\text{ф}} = \varepsilon_{\text{ф}}J$ — плотность потока энергии солнечного излучения $1\,400 \text{ Вт/м}^2$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ — скорость света.

За временной интервал t до пластины долетают и ударяются протоны солнечного ветра, изначально отстоящие от пластины на расстоянии меньше длины vt , где $v = 700 \text{ км/с} = 7 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ — скорость ветра. Соответственно, на пластину попадают протоны из цилиндра с высотой vt и основанием в виде пластины. Объём цилиндра $V = Svt$ определяет количество частиц в нём $N = nV = nSvt$, где $n = 4 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$ — концентрация протонов (число частиц в единичном объёме). Подставляем указанное число протонов N и их импульс $p_{\text{п}} = m_{\text{п}}v$ в формулу (1) для давления:

$$\begin{aligned} P_{\text{вет}} &= \frac{2p_{\text{п}}N/t}{S} = \frac{2(m_{\text{п}}v)(nSvt)/t}{S} = 2m_{\text{п}}nv^2 = \\ &= 2 \cdot (1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}) \cdot (4 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}) \cdot (7 \cdot 10^5 \text{ м/с})^2 = 6,7 \cdot 10^{-9} \text{ Па}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $m_{\text{п}} = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ — масса протона.

Выражения (2) и (3) демонстрируют, что давление излучения больше давления солнечного ветра в $(9,3 \cdot 10^{-6} \text{ Па})/(6,7 \cdot 10^{-9} \text{ Па}) \approx 1\,400$ раз.

3. а) $\vec{g}_s(\vec{r}_1) - \vec{g}_s(\vec{r}_2) = [8\pi G\Lambda/(3c^2)](\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$;
- б) $39 \text{ см} \sim 0,5 \text{ м}$;

в) 4,0 млрд км \approx 30 а. е.

а) Пусть тела с произвольными массами находятся в точках \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . Разность ускорений тел в «гравитационном» поле тёмной материи

$$\vec{g}_s(\vec{r}_1) - \vec{g}_s(\vec{r}_2) = \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) - \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_0) = \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

как видно, не содержит радиуса \vec{r}_0 и поэтому не зависит от выбора начала отсчёта \vec{r}_0 . Силы взаимодействия между телами (электрические, гравитационные) определяются их относительным положением $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ и не зависят от \vec{r}_0 . Поэтому ускорения, создаваемые этими силами также не зависят от положения центра \vec{r}_0 . Таким образом, относительное ускорение тел не зависит от выбора начала отсчёта \vec{r}_0 и при учёте взаимодействия между телами.

б) При наличии тёмной энергии, два атома водорода приобретают ускорения

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) - \frac{Gm_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \\ \vec{a}_2 &= \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_0) - \frac{Gm_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \end{aligned}$$

где \vec{r}_1 и \vec{r}_2 — положения атомов водорода; $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг — масса протона (ядра атома водорода), которая практически совпадает с массой атома водорода в силу малой массы электрона; $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²) — гравитационная постоянная, $\Lambda = 6 \cdot 10^{-10}$ Дж/м³ — космологическая постоянная (плотность тёмной энергии), $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Соответственно, ускорение атомов относительно друг друга

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = G \left(\frac{8\pi\Lambda}{3c^2} - \frac{2m_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

противонаправлено их относительному положению $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (так что неподвижные относительно друг друга атомы начинают сближаться), если выполнено неравенство

$$\frac{2m_p}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} > \frac{8\pi\Lambda}{3c^2}.$$

Последнее определяет искомый интервал начальных расстояний для взаимного сближения атомов

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < \left(\frac{3m_p c^2}{4\pi\Lambda} \right)^{1/3} = \left(\frac{3 \cdot (1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2}{4 \cdot 3,14 \cdot (6 \cdot 10^{-10} \text{ Дж/м}^3)} \right)^{1/3} \approx 0,39 \text{ м} \sim 0,5 \text{ м}.$$

В среднем в современную эпоху во Вселенной приходится один атом водорода (полностью ионизованный — в виде не связанных между собой электрона и протона) на 4 куб. м. Так что среднее расстояние между частицами во Вселенной существенно превышает найденное выше значение, при котором нейтральные частицы могли бы противостоять всё более быстрому взаимному разбеганию под действием тёмной энергии.

в) Сила электрического (кулоновского) притяжения электрона и протона ke^2/r^2 существенно превышает их классическое ньютоново притяжение $Gm_e m_p/r^2$, в

$$\frac{ke^2}{Gm_e m_p} = \frac{(9 \cdot 10^9) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(6,7 \cdot 10^{-11}) \cdot (1,7 \cdot 10^{-27})^2 / 1800} \approx 2,1 \cdot 10^{39} \text{ раз},$$

при любом расстоянии между частицами. Здесь $m_e = m_p/1800$ — масса электрона; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд; $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф — константа в законе Кулона. Поэтому ньютоновой частью взаимного гравитационного притяжения частиц можно пренебречь.

Тогда электрон и протон приобретают ускорения

$$\begin{aligned}\vec{a}_e &= \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2} (\vec{r}_e - \vec{r}_0) - \frac{ke^2}{m_e |\vec{r}_e - \vec{r}_p|^3} (\vec{r}_e - \vec{r}_p), \\ \vec{a}_p &= \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2} (\vec{r}_p - \vec{r}_0) - \frac{ke^2}{m_p |\vec{r}_e - \vec{r}_p|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_e),\end{aligned}$$

где \vec{r}_e и \vec{r}_p — положения электрона и протона соответственно. Ускорение частиц относительно друг друга

$$\vec{a}_e - \vec{a}_p = \left(\frac{8\pi G\Lambda}{3c^2} - \frac{ke^2}{\mu |\vec{r}_e - \vec{r}_p|^3} \right) (\vec{r}_e - \vec{r}_p)$$

противонаправлено их относительному положению $\vec{r}_e - \vec{r}_p$ при условии

$$\frac{ke^2}{\mu |\vec{r}_e - \vec{r}_p|^3} > \frac{8\pi G\Lambda}{3c^2},$$

где $\mu = m_e m_p / (m_p + m_e) \approx m_e$ — так называемая приведённая масса системы двух частиц ($\mu^{-1} = m_e^{-1} + m_p^{-1}$). В результате получаем интервал расстояний, на которых частицы удерживаются относительно друг друга силой взаимного электрического притяжения:

$$|\vec{r}_e - \vec{r}_p| < \left(\frac{3ke^2 c^2}{8\pi G\Lambda m_e} \right)^{1/3} = \left[\frac{3 \cdot (9 \cdot 10^9) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{8 \cdot 3,14 \cdot (6,7 \cdot 10^{-11}) \cdot (6 \cdot 10^{-10}) \cdot (1,7 \cdot 10^{-27}/1800)} \right]^{1/3} \text{ м} \approx 4,0 \cdot 10^{12} \text{ м} = 4,0 \text{ млрд км} = 27 \text{ а. е.}$$

— примерно радиус орбиты Нептуна.

Поскольку относительное ускорение частиц $\vec{a}_e - \vec{a}_p$ противонаправлено их относительному положению, то, гипотетически (в отсутствие других частиц), электрон и протон могли бы равномерно вращаться вокруг друга друга на указанных расстояниях при соответствующей начальной относительной скорости и тем самым представлять собой атом водорода. При этом центр масс атома водорода ускоренно удалялся бы от начала отсчёта \vec{r}_0 , если последнее выбрано смещённым относительно начального положения центр масс.

4. 160 млн масс Солнца.

Однородное поле силы тяжести стремилось бы ускорять разные части Солнца с одинаковым ускорением, что не создавало бы причин для относительного ускорения этих частей. Поэтому Солнце падало бы в однородном поле силы тяжести, как в состоянии невесомости, без деформации своей структуры.

В неоднородном поле силы тяжести точечного тела (в данном случае чёрной дыры) более близко расположенные к притягивающему внешнему телу части Солнца испытывают большее притяжение, чем диаметрально противоположные. Указанная разность сил (приливная сила) и способна вызвать «растекание» Солнца вдоль радиуса падения. (При этом гравитационное поле внешнего тела стремится сжать Солнце в плоскостях, перпендикулярных направлению падения.)

В отсутствие внешнего гравитационного поля, ускорение свободного падения g внутри Солнца примерно линейно увеличивается от нуля в центре светила до значения g_0 на его

поверхности, так что её радиальная компонента

$$g_r(r) = -g_0 \frac{r}{R_C},$$

где r — расстояние до центра Солнца, R_C — радиус Солнца, знак минус указывает на направление ускорения свободного падения к центру Солнца. В свою очередь, разность ускорений свободного падения, создаваемых чёрной дырой в центре Солнца и на расстоянии r от его центра, также примерно линейно зависит от величины r . Соответствующая разность радиальных компонент ускорений

$$\Delta g_r = g_{\text{чдр}}(r_0 + r) - g_{\text{чдр}}(r_0) = -GM \left[\frac{1}{(r_0 + r)^2} - \frac{1}{r_0^2} \right] = GM \frac{r(2r_0 + r)}{r_0^2(r_0 + r)^2} \approx GM \frac{2r}{r_0^3}$$

положительна, что указывает на противоположное направление радиальных приливных сил по отношению к собственному гравитационному полю Солнца. Здесь r_0 — расстояние от чёрной дыры до центра Солнца, M — масса чёрной дыры, G — гравитационная постоянная.

«Разрывающая» радиальная приливная сила чёрной дыры превысит сжимающее собственное гравитационное поле Солнце при условии

$$GM \frac{2}{r_0^3} - \frac{g_0}{R_C} > 0, \quad (1)$$

чему соответствует положительное значение суммы $\Delta g_r + g_r$ во всём объёме светила. Рассматриваем неравенство (1) для расстояния r_0 до чёрной дыры, равного радиусу горизонта событий $2GM/c^2 = [2GM_C/c^2] (M/M_C)$; подставляем ускорение свободного падения на поверхности Солнца g_0 в виде GM_C/R_C^2 , где M_C — масса Солнца. В результате условие (1) «растекания» Солнца принимает вид искомого ограничения на массу чёрной дыры

$$\frac{M}{M_C} < \left(\frac{2R_C^3}{[2GM_C/c^2]^3} \right)^{1/2}.$$

Здесь величина

$$\frac{2GM_C}{c^2} = \frac{2 \cdot (6,7 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)) \cdot (2 \cdot 10^{30} \text{ кг})}{(3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2} \approx 3000 \text{ м} = 3,0 \text{ км}$$

имеет смысл радиуса горизонта событий для чёрной дыры солнечной массы. Таким образом, максимальная масса $M_{\text{макс}}$ чёрной дыры, которая может разорвать Солнце, составляет в единицах массы M_C величину

$$\frac{M_{\text{макс}}}{M_C} = \sqrt{2} \left(\frac{R_C}{[2GM_C/c^2]} \right)^{3/2} = 1,41 \left(\frac{700\,000 \text{ км}}{3,0 \text{ км}} \right)^{3/2} = 1,6 \cdot 10^8.$$

Радиус горизонта событий для такой сверхмассивной чёрной дыры $[2GM_C/c^2] (M/M_C) = (3,0 \text{ км}) \cdot 1,6 \cdot 10^8 = 4,8 \cdot 10^8 \text{ км}$ примерно в 3 раза больше радиуса орбиты Земли вокруг Солнца.