**Условия и решение задач
на городской астрономической олимпиаде по астрономии, астрофизике и физике космоса им. М. Т. Греховой
23 декабря 2007 г.**

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. а) Как определить, в южном или северном полушарии Земли Вы находитесь, наблюдая за перемещением Солнца по небу в течение дня?

б) Как определить широту места в северном полушарии, зная направление на Полярную звезду?

2. Длина тени в Нижнем Новгороде в августовский полдень близка к высоте предметов. Какова длина тени от вертикального шеста высотой 1 метр в полдень того же дня в Австралии на широте 34°. Географическая широта Нижнего Новгорода равна 56°.

3. Ближайшая к нам крупная галактика Туманность Андромеды видна невооружённым глазом как слабое пятнышко диаметром в четверть диаметра Луны. В то же время звёзды (за исключением Солнца) наблюдаются как яркие точечные объекты. Определите, что больше: расстояние между галактиками, выраженное через их диаметр, или расстояние между звёздами, выраженное через их диаметр?

4. Две звезды с массами $m_1 > m_2$ образуют двойную систему (вращаются относительно друг друга). Определите отношение кинетических энергий звёзд, связанных с их орбитальным вращением. Какая звезда обладает бо́льшей кинетической энергией?

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Расстояние до Туманности Ориона было определено наиболее точно методом параллакса на радиоинтерферометре VLBA в 2007 г. Угловое смещение звёзд туманности в диаметрально противоположных точках орбиты Земли составило $\theta = \pm 0{,}00242$ угловых секунды. Определите, сколько времени идёт до нас свет от Туманности Ориона со скоростью $c = 300\,000$ км/с, если радиус орбиты Земли $R_{\mathrm{E}} = 150$ млн. км.

2. Определите радиус орбиты геостационарного спутника (спутника, который постоянно находится над одной точкой Земли), если ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2, а радиус Земли $R = 6400$ км.

3. Оцените время, за которое температура Солнца изменилась бы вдвое без термоядерного подогрева в центре. Считайте Солнце состоящим из ионизованного водорода с массой $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ г и температурой $T = 7$ млн. градусов (половина от температуры в центре звезды). Молярная масса водорода $m_{\mathrm{H}} = 1$ г/моль, газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль $\cdot$ К). Плотность потока энергии солнечного излучения на орбите Земли $F = 1{,}4$ кВт/м^2, радиус орбиты Земли $R_{\mathrm{E}} = 150$ млн. км. При расчёте используйте известное выражение $S = 4\pi r^2$ для площади сферы радиуса r.

4. При наибольшем сближении с Землёй (в противостоянии) Марс имеет видимую звездную величину $m_0 = -2{,}5^{\mathrm{m}}$. Вычислите видимую звездную величину Марса через три месяца после противостояния. Расстояние от Земли до Солнца $R_{\mathrm{E}} = 150$ млн. км, расстояние от Марса до Солнца $R_{\mathrm{M}} = 230$ млн. км.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. В настоящее время основным способом обнаружения экзопланет (планет у других звёзд) являются измерения периодических вариаций скорости звезды вдоль луча зрения. Современные методы позволяют измерять такие вариации с амплитудой до 1 м/с.

а) Можно ли таким образом обнаружить планету типа Земли на той же орбите, что и в солнечной системе?

б) Можно ли таким образом обнаружить планету типа Юпитера на орбите Земли?

Масса Солнца составляет 333 000 масс Земли, а масса Юпитера — 318 масс Земли, радиус орбиты Земли $R_{\mathrm{E}} = 150$ млн. км.

2. Спутник вращается по круговой орбите вокруг Земли. Из-за трения о верхние слои атмосферы его высота постепенно уменьшается. Как изменяется кинетическая энергия спутника, если трение совершает над ним работу минус 1 Дж?

3. Лунные морские приливы в два раза выше, чем солнечные. Оцените среднюю плотность Солнца, если средняя плотность Луны составляет 3 тонны на кубический метр.

4. Какой площади должен быть «световой» парус — полностью отражающая свет плоскость, чтобы в окрестности Земли на него действовала сила давления солнечного излучения в 1 ньютон? Плотность потока энергии солнечного излучения на орбите Земли $F = 1{,}4$ кВт/м^2. Для расчёта давления излучения используйте известное соотношение $w = pc$ между энергией w и импульсом p фотона (частицы света), где $c = 300\,000$ км/с — скорость света (фотона).

1. а) Если Солнце движется по небосводу по часовой стрелке, то Вы находитесь в северном полушарии. Если против часовой стрелки — в южном.

б) Географическая широта равна углу между направлением на Полярную звезду и плоскостью горизонта (земли). В частности, на северном полюсе географическая широта равна 90° **и Полярная звезда располагается точно над головой, а в приэкваториальных областях — низко над горизонтом.**

2. Ответ: 1 метр.

Сумма географических широт пунктов в Нижнем Новгороде и Австралии составляет $56 + 34 = 90$ градусов. Следовательно, полуденные вертикали в Нижнем Новгороде и Австралии образуют прямой угол — 90°. Из равенства длины тени и высоты предмета в Нижнем Новгороде следует, что направление на Солнце составляет угол 45° с полуденной вертикалью в Нижнем Новгороде и отклонено к югу. Таким образом, направление на Солнце является биссектрисой прямого угла между полуденными вертикалями в Нижнем Новгороде и Австралии. Точки в Нижнем Новгороде и Австралии (в соответствующие полдни) расположены зеркально симметрично относительно направления на Солнце и, следовательно, одинаковые предметы в Нижнем Новгороде и Австралии отбрасывают равные тени. В частности, шест высотой 1 метр отбрасывает тень, равную своей высоте 1 метр.

3. Ответ: больше расстояние до звёзд, выраженное через их диаметр.

Отношение диаметра D объекта к расстоянию d до него равно видимому угловому размеру объекта $\theta = D/d$ (точнее $\sin(\theta/2) = (D/2)/d$). Звёзды видны как точечные объекты, поэтому их угловой размер $\theta = D/d$ существенно меньше, чем угловой размер Туманности Андромеды. Следовательно, расстояние до звёзд, выраженное через их диаметр, — $d/D = 1/\theta$ — существенно больше, чем аналогичный параметр для Туманности Андромеды.

4. Ответ: отношение кинетических энергий звёзд обратно пропорционально отношению их масс — $W_1/W_2 = m_2/m_1$. Большей кинетической энергией обладает звезда с меньшей массой m_2.

Звёзды вращаются вокруг общего неподвижного центра масс. Поскольку центр масс неподвижен, то в любой момент времени звёзды движутся в противоположные стороны (мгновенные скорости направлены вдоль параллельных прямых в противоположные стороны), а отношение их скоростей обратно пропорционально отношению масс:

$$v_1/v_2 = m_2/m_1. \tag{1}$$

(более тяжёлая звезда с массой m_1 движется медленнее, а лёгкая — быстрее). Используя соотношение (1), находим искомое отношение кинетических энергий:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{m_1 v_1^2/2}{m_2 v_2^2/2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1} < 1.$$

Решение задач 10 класса

1. Ответ: 1350 лет.

Пусть некоторую звезду A в туманности Ориона наблюдают из точек B и C, лежащих на концах диаметра орбиты Земли. Указанный диаметр перпендикулярен направлению от Солнца на туманность Ориона, чтобы отклонение звезды в точках B и C было максимальным. Согласно условию задачи направления BA и CA на звезду образуют угол 2θ. Тогда в равнобедренном треугольнике ABC с вершиной A на звезде основание

$$\begin{aligned} BC = 2\,AB\,\sin(\theta) \approx 2\,AB\,\theta[\text{рад}] = \\ = 2\,AB\,\pi/(180\cdot 60\cdot 60)\cdot\theta[\text{угл. с}] = 2\,AB\,\pi/(648\,000)\cdot\theta[\text{угл. с}], \quad (1)\end{aligned}$$

где в квадратных скобках указаны единицы измерения угла θ. Вместе с тем

$$BC = 2R_{\text{E}}. \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), находим расстояние до туманности Ориона

$$r \equiv AB = R_{\text{E}}/\theta[\text{рад}] = (648\,000/\pi)\,R_{\text{E}}/\theta[\text{угл. с}] = 1{,}3\cdot 10^{16}\ \text{км}.$$

Искомое время распространения света от туманности Ориона до Земли

$$t = r/c = 1{,}3\cdot 10^{16}\ \text{км}/(300\,000\ \text{км/с}) = 4{,}3\cdot 10^{10}\ \text{с} = 1350\ \text{лет}.$$

В последнем выражнии учтено, что 1 год $= 365\cdot 24\cdot 3600$ с $= 3{,}2\cdot 10^7$ с.

2. Ответ: 42 тыс. км.

Пусть спутник с массой m движется со скоростью v по круговой орбите искомого радиуса r. Согласно второму закону Ньютона центростремительное ускорение спутника v^2/r равно силе гравитации со стороны Земли GmM/r^2, делённой на массу спутника m:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \qquad (1)$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли. Скорость спутника v равна длине его орбиты $2\pi r$, делённой на период вращения T:

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1):
$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GM}{r^2}.$$
Выражаем радиус орбиты из последнего равенства:
$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \tag{3}$$
Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = GM/R^2$, что определяет произведение
$$GM = gR^2. \tag{4}$$
Подставляем (4) в (3):
$$r = \left(\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \tag{5}$$
Для того, чтобы находиться над одной точкой Земли спутник должен двигаться с периодом, равным периоду обращения Земли
$$T = 24\ \text{ч} = 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{с} = 86\,400\ \text{с}. \tag{6}$$
Подставляем в (5) данные из условия задачи: $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2 = 0{,}0098\ \text{км/с}^2$, $R = 6400$ км, и указанный период (6). Получаем ответ $r = 42$ тыс. км.

3. Ответ: 30 млн. лет.

Полная ионизация водорода означает, что единственный электрон, вращавшийся в атоме водорода, больше не привязан к ядру (протону). Каждый атом водорода распадается («диссоциирует») на ядро (протон) и электрон.

Оценим тепловую кинетическую энергию частиц Солнца. Количество водорода (протонов) в молях составляет
$$\nu_\text{H} = M_\odot/m_\text{H}.$$
Таким же является количество оторванных электронов: $\nu_\text{e} = \nu_\text{H}$. Считая, что ядра водорода и электроны образуют одноатомные газы, находим их суммарную кинетическую энергию
$$K = (3RT/2)\,(\nu_\text{H} + \nu_\text{e}) = 3RT\nu_\text{H} = 3RTM_\odot/m_\text{H}. \tag{1}$$

Механическая энергия частиц Солнца складывается из кинетической энергии K ядер водорода (протонов) и оторванных от них электронов, а также потенциальной энергии U этих частиц в гравитационном поле Солнца. На примере движения частицы массы m по круговой орбите радиуса r в поле точечной неподвижной массы M можно показать, что

$$K = -U/2. \tag{2}$$

Действительно, согласно второму закону Ньютона произведение центростремительного ускорения v^2/r на массу частицы m равно гравитационной силе GmM/r^2:

$$mv^2/r = GmM/r^2,$$

где G — гравитационная постоянная. Умножение последнего равенства на r даёт указанное соотношение между кинетической и потенциальной энергией:

$$K_m = mv^2/2 = -(-GmM/r)/2 = -U_m/2.$$

Из соотношения (2) следует, что полная механическая энергия $W = K + U$ образующих Солнце частиц отрицательна и равна кинетической энергии, взятой со знаком минус:

$$W = K + U = K + (-2K) = -K. \tag{3}$$

Солнце теряет энергию за счёт излучения. Эти потери равны потоку солнечного излучения через сферу, охватывающую орбиту Земли:

$$P = FS = 4\pi R_{\mathrm{E}}^2 F, \tag{4}$$

где $S = 4\pi R_{\mathrm{E}}^2$ — площадь указанной сферы.

Потери энергии Солнцем на излучение приводят к алгебраическому уменьшению отрицательной полной механической энергии W, что происходит за счёт увеличения абсолютной величины $|W|$, а, следовательно, и равной ей величины K (см. (3)). Таким образом, кинетическая энергия K частиц Солнца и температура T стали бы увеличиваться без термоядерного подогрева в центре. Гравитационное сжатие сопровождается нагревом: высвобождающаяся потенциальная гравитационная энергия поровну переходит в энергию излучения и тепловую энергию частиц.

Согласно (1) увеличение температуры T в два раза сопровождается таким же увеличением в два раза кинетической энергии K. Вместе с тем согласно (3) во столько же раз увеличивается абсолютная величина $|W|$ полной механической энергии. Таким образом, искомое время изменения температуры в два раза оценивается как время изменения абсолютной величины механической энергии от $|W|$ до $2\,|W|$:

$$t = \frac{2\,|W| - |W|}{P} = \frac{|W|}{P} = \frac{K}{P} = \frac{3RTM_\odot/m_\mathrm{H}}{4\pi R_\mathrm{E}^2 F}, \tag{5}$$

где подставлены выражения (1) и (4) для K и P.

Подставляем в (5) численные значения из условия задачи: $R = 8{,}3$ Дж/(моль $\cdot$ К), $T = 7 \cdot 10^6$ К, $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г, $m_\mathrm{H} = 1$ г/моль, $R_\mathrm{E} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м, $F = 1400$ Вт/м^2, что даёт

$$t = 8{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{с} \approx 30\ \text{млн. лет}.$$

Для перевода времени t из секунд в годы использовано равенство 1 год $= 365 \cdot 24 \cdot 3600$ с $= 3{,}2 \cdot 10^7$ с.

4. Ответ: $-0{,}9^\mathrm{m}$.

Найдём отношение периодов обращения Марса T_M и Земли $T_\mathrm{E} = 12$ месяцев. Для этого рассмотрим произвольную планету с массой m, которая движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса R со скоростью v. Согласно второму закону Ньютона центростремительное ускорение v^2/R равно гравитационной силе со стороны Солнца $GmM_\odot/R^2$, делённой на массу планеты m:

$$\frac{v^2}{R} = G\frac{M_\odot}{R^2}, \tag{1}$$

где $M_\odot$ — масса Солнца, G — гравитационная постоянная. Скорость планеты v равна длине орбиты $2\pi R$, делённой на период обращения T:

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \tag{2}$$

Подставляем (2) в (1):

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{GM_\odot}{R^2},$$

откуда получаем выражение для периода T через радиус орбиты R:

$$T = \left(\frac{4\pi^2 R^3}{GM_\odot}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Отношение выражений (3) для Марса и Земли даёт искомую величину

$$\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{E}} = \left(\frac{R_\mathrm{M}}{R_\mathrm{E}}\right)^{3/2}. \tag{4}$$

В момент максимального сближения планет Марс находится на луче, соединяющем Солнце и Землю. Определим угол φ между радиус-векторами от Солнца на Землю и Марс через $t = 3$ месяца после противостояния. Планеты сместятся по своим орбитам на углы

$$\varphi_\mathrm{E} = 2\pi\frac{t}{T_\mathrm{E}}, \qquad \varphi_\mathrm{M} = 2\pi\frac{t}{T_\mathrm{M}}.$$

Следовательно, угол между планетами

$$\varphi = \varphi_\mathrm{E} - \varphi_\mathrm{M} = 2\pi\left(\frac{t}{T_\mathrm{E}} - \frac{t}{T_\mathrm{M}}\right) = 2\pi\frac{t}{T_\mathrm{E}}\left(1 - \frac{T_\mathrm{E}}{T_\mathrm{M}}\right) =$$
$$= 2\pi\frac{t}{T_\mathrm{E}}\left(1 - \left(\frac{R_\mathrm{E}}{R_\mathrm{M}}\right)^{3/2}\right) = 2\pi\frac{3\ \text{мес.}}{12\ \text{мес.}}\left[1 - (150/230)^{3/2}\right] = 0{,}74\ \text{рад}, \tag{5}$$

где использовано выражение (4) для отношения периодов.

Найдём квадрат расстояния R между планетами через 3 месяца после противостояния по теореме косинусов

$$R^2 = R_\mathrm{E}^2 + R_\mathrm{M}^2 - 2R_\mathrm{E}R_\mathrm{M}\cos(\varphi). \tag{6}$$

Величина (6) относится к квадрату минимального расстояния между планетами $R_\mathrm{E} - R_\mathrm{M}$ в момент противостояния как

$$\frac{R^2}{(R_\mathrm{M} - R_\mathrm{E})^2} = \frac{1 + (R_\mathrm{E}/R_\mathrm{M})^2 - 2\,(R_\mathrm{E}/R_\mathrm{M})\cos(\varphi)}{[1 - (R_\mathrm{E}/R_\mathrm{M})]^2} = 3{,}8, \tag{7}$$

где подставлено отношение $R_\mathrm{E}/R_\mathrm{M} = 150/230$ и угол (5).

В противостоянии с Земли видна вся освещённая Солнцем поверхность Марса. Через три месяца с Земли видна только часть освещённой поверхности Марса. Эта доля определяется углом θ между линиями Марс—Солнце и Марс—Земля. Считаем видимую часть диска Марса равномерно освещённой (отсутствует потемнение к краю диска). От всего диска Марса видна одна полностью освещённая половина, а от второй половины лишь относительная часть, равная $\cos(\theta)$. Таким образом, освещённого доля видимого диска Марса

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\theta). \tag{8}$$

Из теоремы косинусов

$$R_{\mathrm{E}}^2 = R_{\mathrm{M}}^2 + R^2 - 2R_{\mathrm{M}}R\cos(\theta)$$

определяем

$$\cos(\theta) = \frac{R_{\mathrm{M}}^2 + R^2 - R_{\mathrm{E}}^2}{2R_{\mathrm{M}}R} = \frac{2R_{\mathrm{M}}^2 - 2R_{\mathrm{E}}R_{\mathrm{M}}\cos(\varphi)}{2R_{\mathrm{M}}R} = \frac{R_{\mathrm{M}} - R_{\mathrm{E}}\cos(\varphi)}{R} = \\ = \frac{1 - (R_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{M}})\cos(\varphi)}{\sqrt{1 + (R_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{M}})^2 - 2\,(R_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{M}})\cos(\varphi)}} = 0{,}76,$$

где использовано выражение (6) для R^2 и подставлены значения $R_{\mathrm{E}}/R_{\mathrm{M}} = 150/230$ и (5) для φ. В итоге находим численное значение параметра (8):

$$\alpha = (1 + 0{,}76)/2 = 0{,}88. \tag{9}$$

Поток принимаемого излучения от Марса пропорционален доле α освещённой части его видимого диска, а также обратно пропорционален квадрату расстояния до него. Поэтому уменьшение принимаемого потока излучения от Марса обусловлено увеличением расстояния до него и уменьшением освещённой доли видимого диска Марса. Изменение блеска составляет

$$\Delta m = 2{,}5\lg\left[\frac{R^2}{(R_{\mathrm{M}} - R_{\mathrm{E}})^2}\frac{1}{\alpha}\right] = 2{,}5\lg\left[3{,}8/0{,}88\right] = 1{,}6^{\mathrm{m}},$$

где подставлены значения (7) и (9). Искомая видимая звёздная величина

$$m = m_0 + \Delta m = -2{,}5^{\mathrm{m}} + 1{,}6^{\mathrm{m}} = -0{,}9^{\mathrm{m}}.$$

1. а) Планета типа Земли не может быть обнаружена, поскольку вызывает вариации лучевой скорости 9,0 см/с $<$ 1 м/с.

б) Напротив, планета типа Юпитера может быть обнаружена, поскольку вызывает заметные вариации лучевой скорости 29 м/с $>$ 1 м/с.

В качестве модели рассмотрим систему, состоящую из звезды и одиночной планеты с массами $M_\odot$ и m соответственно. Звезда и планета вращаются по круговым орбитам вокруг общего центра масс со скоростями $V_\odot$ и v. В силу неподвижности центра масс скорости вращения звезды и планеты обратно пропорциональны отношению их масс:

$$\frac{V_\odot}{v} = \frac{m}{M_\odot},$$

откуда вариации лучевой скорости звезды

$$V_\odot = v\frac{m}{M_\odot}. \qquad (1)$$

Скорость планеты равна отношению длины орбиты $2\pi R_\mathrm{E}$ к периоду обращения T:

$$v = \frac{2\pi R_\mathrm{E}}{T}. \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$V_\odot = \frac{2\pi R_\mathrm{E}}{T}\,\frac{m}{M_\odot}. \qquad (3)$$

Подставляем в (3) параметры Земли $R_\mathrm{E} = 1{,}5\cdot10^{11}$ м, $T = 1$ год $= 365\cdot24\cdot3600$ с $= 3{,}2\cdot10^7$ с, $m_\mathrm{E}/M_\odot = 1/333\,000$:

$$V_{\odot\mathrm{E}} = 0{,}090 \text{ м/с} = 9{,}0 \text{ см/с}.$$

Эта величина меньше минимального обнаружимого значения 1 м/с, поэтому планета типа Земли не может быть обнаружена современными средствами.

Планета типа Юпитер вращалась бы вокруг Солнца на орбите Земли с периодом вращения Земли $T = 1$ год. Тогда для Юпитера в (3) изменяется только отношение масс $m/M_\odot$, которое в 318 раз больше. Таким образом, Юпитер вызывает в 318 раз бо́льшие вариации скорости звезды, чем Земля:

$$V_{\odot \mathrm{J}} = V_{\odot \mathrm{E}} \frac{m_{\mathrm{J}}}{m_{\mathrm{E}}} = 0{,}090 \text{ м/с} \cdot 318 = 29 \text{ м/с}.$$

Полученная скорость выше минимального обнаружимого значения 1 м/с, поэтому, в отличие от Земли, планета типа Юпитера может быть обнаружена современными средствами.

2. Ответ: Кинетическая энергия спутника увеличивается на 1 Дж.

Пусть спутник массы m движется по круговой орбите радиуса r со скоростью v. Согласно второму закону Ньютона произведение центростремительного ускорения спутника v^2/r на его массу m равно силе притяжения со стороны Земли:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2},$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Умножим последнее уравнение на $r/2$:

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{mM}{2r},$$

что даёт опредлённую связь между кинетической энергией спутника $K = mv^2/2$ и его потенциальной энергией в гравитационном поле Земли $U = -GmM/r$:

$$K = -U/2.$$

Тогда полная механическая энергия спутника

$$W = K + U = K + (-2K) = -K \tag{1}$$

отрицательна и равна по абсолютной величине кинетической энергии.

Работа силы трения минус 1 Дж уменьшает алгебраически полную механическую энергию W на 1 Дж. Поскольку W отрицательна, то такое уменьшение происходит за счёт увеличения её абсолютной величины $|W|$

на 1 Дж. В свою очередь согласно (1) увеличение абсолютной величины $|W|$ на 1 Дж сопровождается увеличением кинетической энергии K на 1 Дж.

Иными словами, из-за трения спутник переходит на более низкие орбиты (ближе к Земле). Известно, что тела на более низких орбитах движутся быстрее: например, Меркурий движется вокруг Солнца быстрее, чем Венера или Земля. Поэтому кинетическая энергия спутника, очевидно, увеличивается. Увеличение кинетической энергии происходит за счёт высвобождения потенциальной гравитационной энергии — положительной работы силы тяжести при смещении спутника по вертикали. Положительная работа силы тяжести ровно в 2 раза больше по абсолютной величине отрицательной работы силы трения. Поэтому суммарная работа силы тяготения и силы трения над спутником оказывается положительной и равной по абсолютной величине отрицательной работе силы трения. Таким образом, кинетическая энергия спутника увеличивается, и это увеличение совпадает по абсолютной величине с работой силы трения.

3. Ответ: 1,5 т/м^3.

В однородном гравитационном поле все части Земли, в том числе и мирового океана, двигались бы с некоторым одинаковым ускорением a_{g} (как в невесомости, падающем лифте), и никаких приливов не было. Небольшое отличие сил гравитации со стороны Луны или Солнца в разных точках Земли стремится придать разные ускорения разным точкам мирового океана, что деформирует его поверхность. Деформации отслеживают положение Луны и Солнца и поэтому движутся относительно поверхности Земли, что и проявляется в виде приливов.

Таким образом, амплитуда приливов пропорциональна отличию сил гравитации со стороны Луны или Солнца, например, в диаметрально противоположных точках Земли на линиях Земля—Луна или Земля—Солнце.

Пусть M_{M} и $M_{\odot}$ — массы Луны и Солнца, L_{M} и $L_{\odot}$ — расстояния от Земли до Луны и Солнца, r_{E}, r_{M} и $r_{\odot}$ — радиусы Земли, Луны и Солнца.

Возьмём некоторую пробную массу m, например, кубический сантиметр воды в океане.

Рассмотрим отличие сил гравитации, действующих на пробную массу в диаметрально противоположных точках Земли на линии Земля—Луна:

$$\begin{aligned}
2\,\Delta F_{\mathrm{M}\|} = \frac{GmM_{\mathrm{M}}}{(L_{\mathrm{M}}-r_{\mathrm{E}})^2} - \frac{GmM_{\mathrm{M}}}{(L_{\mathrm{M}}+r_{\mathrm{E}})^2} = \\
= GmM_{\mathrm{M}}\frac{(L_{\mathrm{M}}+r_{\mathrm{E}})^2-(L_{\mathrm{M}}-r_{\mathrm{E}})^2}{(L_{\mathrm{M}}-r_{\mathrm{E}})^2\,(L_{\mathrm{M}}+r_{\mathrm{E}})^2} = \\
= GmM_{\mathrm{M}}\frac{4L_{\mathrm{M}}r_{\mathrm{E}}}{(L_{\mathrm{M}}-r_{\mathrm{E}})^2\,(L_{\mathrm{M}}+r_{\mathrm{E}})^2} \approx GmM_{\mathrm{M}}\frac{4r_{\mathrm{E}}}{L_{\mathrm{M}}^3}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Масса Луны M_{M} равна произведению её плотности ρ_{M} на её объём V_{M}. В свою очередь объём пропорционален кубу линейных размеров тела:

$$V_{\mathrm{M}} = \alpha r_{\mathrm{M}}^3,$$

где фактор α зависит только от формы тела (в случае шара $\alpha = 4\pi/3$). Тогда масса Луны

$$M_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{M}}\alpha r_{\mathrm{M}}^3. \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$2\,\Delta F_{\mathrm{M}\|} = 4\alpha Gmr_{\mathrm{E}}\rho_{\mathrm{M}}\left(\frac{r_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{M}}}\right)^3. \qquad (3)$$

Аналогичное выражение получаем для отличия сил гравитации со стороны Солнца:

$$2\,\Delta F_{\odot\|} = 4\alpha Gmr_{\mathrm{E}}\rho_{\odot}\left(\frac{r_{\odot}}{L_{\odot}}\right)^3. \qquad (4)$$

Возьмём отношение выражений (3) и (4):

$$\frac{2\,\Delta F_{\mathrm{M}\|}}{2\,\Delta F_{\odot\|}} = \frac{\rho_{\mathrm{M}}\,(r_{\mathrm{M}}/L_{\mathrm{M}})^3}{\rho_{\odot}\,(r_{\odot}/L_{\odot})^3}. \qquad (5)$$

Луна и Солнце имеют примерно одинаковые видимые угловые размеры (что хорошо видно во время солнечных затмений), поэтому отношения линейных размеров $r_{\mathrm{M}}/L_{\mathrm{M}}$ и $r_{\odot}/L_{\odot}$ в (5) равны с высокой точностью. Тогда (5) перепишется как

$$\frac{2\,\Delta F_{\mathrm{M}\|}}{2\,\Delta F_{\odot\|}} \approx \frac{\rho_{\mathrm{M}}}{\rho_{\odot}}. \qquad (6)$$

Таким образом, согласно (6) отношение плотностей Луны и Солнца равно отношению неоднородностей их сил гравитации на масштабе Земли и, следовательно, равно отношению амплитуд вызываемых ими приливов. Поскольку лунные приливы в два раза выше солнечных, то плотность Луны в два раза выше солнечной. Искомая плотность Солнца

$$\rho_{\odot} \approx \rho_{\mathrm{M}}/2 = 1{,}5 \text{ т/м}^3.$$

Найденное отличие сил гравитации в выбранных точках на поверхности Земли показывает, как неоднородность гравитационной силы стремиться растянуть поверхность мирового океана вдоль линий Земля—Луна или Земля—Солнце. Строго говоря, возможен, вариант, что неоднородность гравитационной силы стремиться растянуть поверхность мирового океана во всех точках Земли строго по её радиусу (от её центра наружу). Ясно, что такая неоднородность не изменила бы уровень мирового океана и не вызвала приливы.

Поэтому специально покажем, что неоднородность гравитационной силы, например, Луны, напротив, стремиться сжать поверхность мирового океана в плоскости, перпендикулярной линии Земля—Луна.

Действительно, полная гравитационная сила практически не изменяется по абсолютной величине в этой плоскости, поскольку плоскость является касательной к сфере с центром на Луне и, следовательно, точки плоскости расположены практически на одинаковом расстоянии от гравитирующего объекта — Луны. Однако гравитационная сила изменяется по направлению, поскольку направление на Луну отличаются в разных точках Земли. В результате во всех точках плоскости, отличных от центра Земли, появляется компонента силы гравитации, направленная к центру Земли. Указанная компонента — проекция полной силы гравитации на рассматриваемую плоскость:

$$F_{\mathrm{M}\perp} = -\frac{GmM_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{M}}^2}\sin(\theta_{\mathrm{M}}) \approx -\frac{GmM_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{M}}^2}\frac{r_{\mathrm{E}}}{L_{\mathrm{M}}} = -\Delta F_{\mathrm{M}\parallel}/2,$$

где $\theta_{\mathrm{M}} \approx r_{\mathrm{E}}/L_{\mathrm{M}}$ — угол между нормалью к плоскости (линии Земля—Луна) и направлением из выбранной точки Земли на Луну.

Таким образом, неоднородное гравитационное поле Луны или Солнца, с одной стороны, стремиться растянуть поверхность мирового океана вдоль линий Земля—Луна и Земля—Солнце с одной силой, а с другой стороны, стремиться сжать поверхность мирового океана в плоскостях, перпендикулярным этим линиям, с половинной силой.

4. Ответ: 0,11 км^2.

Рассмотрим взаимодействие фотонов с парусом за некоторое время t. До паруса долетают только те фотоны, которые находились от него в начальный момент времени на расстояниях, меньше ct. Поэтому за время t с парусом столкнутся солнечные фотоны из пространства в виде прямого цилиндра, основанием которого является парус, а его высота $h = ct$. Объём цилиндра (параллелепипеда в случае прямоугольного паруса)

$$V = Sct.$$

Пусть n — концентрация фотонов (число фотонов в 1 м^3), тогда за время t с парусом столкнутся фотоны в общем числе

$$N = nV = nSct. \tag{1}$$

При отражении от паруса каждый фотон изменяет свой импульс на противоположный и, следовательно, передаёт парусу импульс $2p$. Тогда за время t парус получит импульс от N фотонов

$$P = 2pN = 2pnSct,$$

что соответствует действующей на него силе давления излучения

$$T = \frac{P}{t} = 2pnSc. \tag{2}$$

В отсутствие паруса те же N фотонов перенесли бы через площадку S энергию

$$W = wN = wnSct, \tag{3}$$

где использовано выражение (1) для N. Согласно определению плотности потока излучения F та же энергия

$$W = FSt. \qquad (4).$$

Приравняв (3) и (4), найдём концентрацию фотонов

$$n = \frac{F}{wc}. \tag{5}$$

Подставляем концентрацию фотонов (5) в выражение (3) для силы давления излучения:

$$T = 2FS\frac{p}{w}. \tag{6}$$

Согласно специальному указанию в условии задачи отношение $p/w = 1/c$, что при подстановке в (6) определяет силу

$$T = \frac{2FS}{c}. \tag{7}$$

Из (7) искомая площадь паруса

$$S = \frac{Tc}{2F} = \frac{1\ \text{Н} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{м/с})}{2 \cdot 1400\ \text{Вт/м}^2} = 1{,}1 \cdot 10^5\ \text{м}^2 = 11\ \text{га} = 0{,}11\ \text{км}^2.$$