Условия и решение задач городской олимпиады по астрономии, астрофизике и физике космоса им. М. М. Кобрина
14 декабря 2008 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Вычислите время, за которое Земля проходит расстояние, равное своему диаметру, при движении вокруг Солнца. По вашей оценке, за какое время обыкновенная черепаха проходит путь, равный своему размеру? В этом смысле кто быстрее: Земля или черепаха? Диаметр Земли $D_З = 12\,800$ км, а радиус её орбиты $R = 150$ млн. км. Длина окружности радиуса r равна $2\pi r$, где $\pi \approx 3{,}14$.

2. Вследствие аварии на машине времени вас занесло на необитаемый остров, расположенный на экваторе. По движению Солнца на небосводе определите, зима или лето наступили в Нижнем Новгороде в момент вашей высадки на остров.

3. Луна вращается вокруг Земли и одновременно вместе с Землёй вращается вокруг Солнца. Есть ли на траектории движения Луны относительно Солнца точки самопересечения (в течение полугода)? Радиус орбиты Земли $R_З = 150$ млн. км, а Луна удалена от Земли на расстояние $R_Л = 380$ тыс. км и делает один оборот вокруг Земли примерно за месяц. Все орбиты считать лежащими в одной плоскости.

4. Оцените, на какую долю своего радиуса смещается Солнце при вращении системы Солнце—Юпитер вокруг своего центра масс. Отношение массы Солнца к массе Юпитера и отношение расстояния от Солнца до Юпитера к радиусу Солнца примерно равны 1000.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. На какую максимальную высоту над горизонтом поднимается Солнце в Нижнем Новгороде в самый длинный и самый короткий дни года? Географическая широта Нижнего Новгорода 56° к северу от экватора, а северного тропика — 23°.

2. Как сильно могут отличаться периоды облёта тел Солнечной системы на соответствующих первых космических скоростях, если их плотности одинаковы по порядку величины?

3. На круговые околоземные орбиты необходимо запустить два одинаковых спутника так, чтобы их периоды отличались в 8 раз. Во сколько раз должны отличаться радиусы их орбит? У какого спутника кинетическая энергия окажется больше и во сколько раз?

4. За время термоядерного горения в Солнце выделится энергия, равная 0,7 % от энергии покоя «прогоревшего» вещества $M_{\text{г}}c^2$. Масса вещества $M_{\text{г}}$, которое вступит в термоядерные реакции, составляет около 10 % от всей массы Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $c = 300\,000$ км/с — скорость света. Какое время термоядерное горение сможет поддерживать на Земле поток солнечного излучения порядка современного значения $J = 1{,}4$ кВт/м^2? Радиус орбиты Земли $R_{\text{З}} = 150$ млн. км. Площадь сферы радиуса r равна $4\pi r^2$.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. а) Оцените, чего больше: молекул воды в стакане объёмом 200 мл или звёзд во всей видимой части Вселенной, которая охватывает порядка 10 миллиардов крупных галактик, как наша, и в каждой такой галактике примерно 200 миллиардов звёзд?

б) Каков диаметр капли, содержащей столько же молекул воды, сколько звёзд в нашей Галактике — Млечный путь?

Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, число Авогадро $N_{\text{А}} = 6 \cdot 10^{23}$, объём сферы диаметра d равен $\pi d^3/6$.

2. Покажите, что сила притяжения Луны к Солнцу больше силы притяжения Луны к Земле. Попробуйте объяснить, почему же всё-таки Луна вращается вокруг Земли. Радиус орбиты Земли $R_{\text{З}} = 150$ млн. км, Луна удалена от Земли на расстояние $R_{\text{Л}} = 380$ тыс. км и делает один оборот вокруг Земли примерно за месяц.

3. Представьте плоскую спиральную галактику, погружённую в однородное облако невидимой тёмной материи. Центральная часть галактики представляет собой массивный светящийся шар из звёзд и газа — балдж. Звёзды, расположенные на границе балджа, и на вдвое большем удалении от центра галактики вращаются с одинаковыми поступательными скоростями вокруг центра галактики. Определите отношение плотностей масс светящейся и тёмной материй в балдже (пренебрегая массой плоской составляющей галактики).

4. Какой толщины должен быть алюминиевый «световой» парус — полностью отражающая свет плоскость, чтобы преодолеть своё притяжение к Солнцу за счёт давления солнечного света? Плотность алюминия $\rho = 2700$ кг/м^3. Плотность потока энергии солнечного излучения на орбите Земли $J = 1{,}4$ кВт/м^2. Земля обращается вокруг Солнца за один год по орбите радиусом $R_{\text{З}} = 150$ млн. км. Для расчёта давления излучения используйте известное соотношение $w = pc$ между энергией w и импульсом p фотона (частицы света), где $c = 300\,000$ км/с — скорость света (фотона).

Решение задач 8–9 классов

1. При таком подходе черепаха оказывается быстрее Земли. Земля проходит расстояние, равное своему диаметру, за 7 минут. Черепаха проходит свой размер за 10–20 секунд.

Длина орбиты Земли $L = 2\pi R = 9{,}4 \cdot 10^8$ км. Планета проходит это расстояние за один год, длительность которого в секундах $T = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}2 \cdot 10^7$ с. Соответственно скорость Земли $V = L/T = 30$ км/с. Она проходит расстояние, равное своему диаметру $D_З = 12\,800$ км, за искомое время $t = D_З/V = 430$ с $= 7$ мин.

Ясно, что черепаха проползёт расстояние, равное своему размеру, быстрее, чем за 7 мин. Например, если принять диаметр черепахи 10–20 см, а её скорость 1 см/с, то время движения составит 10–20 с.

2. Если Солнце движется против часовой стрелки, то лето. Если по часовой стрелке — зима.

Если в Нижнем Новгороде лето, то на экваторе Солнце поднимается на востоке, проходит к северу от вертикали и заходит на западе — движется против часовой стрелки. Если в Нижнем Новгороде зима, то на экваторе Солнце по-прежнему поднимается на востоке, но уже проходит к югу от вертикали и заходит на западе — движется по часовой стрелке.

3. Нет.

Наличие точек самопересечения означает, что азимутальная скорость Луны относительно Солнца может менять знак. Такое возможно, только если скорость вращения Луны вокруг Земли больше скорости вращения системы Земля—Луна вокруг Солнца. Длина орбиты Земли $L_З = 2\pi R_З = 9{,}4 \cdot 10^8$ км. Планета проходит это расстояние за один год, длительность которого в секундах $T_З = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}2 \cdot 10^7$ с. Соответственно, скорость Земли $V_З = L_З/T_З = 30$ км/с. В свою очередь длина орбиты Луны вокруг Земли $L_Л = 2\pi R_Л = 2{,}4 \cdot 10^6$ км. Луна проходит это расстояние за 28 суток, длительность которых в секундах $T_Л = 28 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 2{,}4 \cdot 10^6$ с. Скорость Луны относительно Земли $V_Л = L_Л/T_Л = 1$ км/с. Скорость $V_Л < V_З$, поэтому самопересечений траектории нет.

4. Солнце смещается на расстояние порядка своего радиуса. В качестве ответа принимается как амплитуда смещения в один радиус, так и удвоенная амплитуда (размах) в два радиуса — диаметр Солнца.

Пусть $d_{\text{Ю}}$ — расстояние от Солнца до Юпитера, $M_\odot$ и $M_{\text{Ю}}$ — массы Солнца и Юпитера. Согласно своему определению, центр масс системы Солнце—Юпитер удалён от центра Солнца на расстояние

$$r = \frac{M_{\text{Ю}} d_{\text{Ю}}}{M_\odot + M_{\text{Ю}}} = \frac{d_{\text{Ю}}}{(M_\odot/M_{\text{Ю}}) + 1} = \frac{d_{\text{Ю}}}{1000 + 1} \approx \frac{d_{\text{Ю}}}{1000},$$

где использовано данное в задаче отношение масс $M_\odot/M_{\text{Ю}} = 1000$. Вместе с тем согласно условию задачи радиус Солнца равен тому же расстоянию $d_{\text{Ю}}/1000$. Следовательно, центр масс системы находится на поверхности Солнца, и Солнце вращается вокруг этого центра масс по окружности радиуса r, который совпадает с радиусом звезды. Таким образом, в своём вращении Солнце смещается от центра масс на расстояние, равное своему радиусу.

Для справки приведём численные значения масс и расстояний: $M_\odot = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг, $M_{\text{Ю}} = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ кг, $d_{\text{Ю}} = 780$ млн. км $= 5{,}2$ а. е., радиус Солнца $R_\odot = 700$ тыс. км.

Решение задач 10 класса

1. В самый длинный день Солнце поднимается на 57°, в самый короткий — на 11°.

В самый длинный день Солнце проходит через зенит над северным тропиком. Соответственно, в этот день в Нижнем Новгороде Солнце проходит от вертикали на минимальном угловом расстоянии $56^\circ - 23^\circ = 33^\circ$, и, следовательно, искомая максимальная высота над горизонтом составляет $90^\circ - 33^\circ = 57^\circ$.

В самый короткий день Солнце проходит через зенит над южным тропиком. В Нижнем Новгороде Солнце проходит от вертикали на угловом расстоянии $56^\circ + 23^\circ = 79^\circ$, и максимальная высота над горизонтом равна $90^\circ - 79^\circ = 11^\circ$.

2. Ответ: Меньше, чем на порядок.

Пусть спутник облетает на первой космической скорости v некоторое космическое тело в виде шара. Следовательно, радиус орбиты равен радиусу тела R. Спутник имеет центростремительное ускорение

$$a = \frac{v^2}{R} \,.$$

Скорость v связана с периодом обращения T формулой $v = 2\pi R/T$, что позволяет записать ускорение в виде

$$a = \frac{(2\pi R/T)^2}{R} = \frac{(2\pi)^2 \, R}{T^2} \,.$$

Центростремительное ускорение обеспечивается силой притяжения со стороны космического тела $F = GmM/R^2$, где M и m — массы тела и спутника, G — гравитационная постоянная. Согласно второму закону Ньютона, приравниваем произведение ma силе F:

$$m \, \frac{(2\pi)^2 \, R}{T^2} = G \, \frac{mM}{R^2} \,.$$

Из последнего равенства выражаем период обращения

$$T = \frac{2\pi}{(GM/R^3)^{1/2}} \,. \qquad (1)$$

Масса тела M пропорциональна кубу его характерного размера R, поэтому отношение M/R^3 в знаменателе (1) определяется только плотностью ρ. Действительно, объём тела

$$V = \kappa R^3,$$

где численная константа κ не зависит радиуса тела и её конкретное значение не требуется для решения задачи (для справки $\kappa = 4\pi/3$). Масса однородного тела пропорциональна его объёму и плотности:

$$M = \rho V = \kappa\rho R^3.$$

Следовательно, отношение $M/R^3 = \kappa\rho$, и период обращения (1) запишется в виде

$$T = \frac{2\pi}{(G\kappa\rho)^{1/2}}\,.$$

Таким образом, период облёта тела на первой космической скорости определяется только его плотностью. Соответственно, если плотности тел одного порядка, то периоды заведомо отличаются меньше, чем на порядок. Например, если отношение плотностей равно 10, то отношение периодов равно $\sqrt{10} \approx 3$.

3. Ответ: а) Радиусы орбит должны отличаться в 4 раза.

б) Кинетическая энергия больше в 4 раза у спутника на более низкой орбите.

в) Больше горючего потребуется для запуска спутника на более высокой орбите.

Пусть спутник движется по круговой орбите радиуса R с некоторой поступательной скоростью v. Согласно второму закону Ньютона, центростремительное ускорение спутника v^2/R равно силе тяготения, делённой на массу спутника:

$$\frac{v^2}{R} = G\,\frac{M}{R^2}\,, \qquad (1)$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Скорость v связана с периодом обращения T соотношением $v = 2\pi R/T$, что при подстановке в (1) даёт равенство

$$\frac{(2\pi)^2 R}{T^2} = G\,\frac{M}{R^2}\,. \tag{2}$$

Из (2) находим связь радиуса орбиты с периодом:

$$R = \left(\frac{GMT^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} \propto T^{2/3}. \tag{3}$$

Согласно (3), чтобы увеличить период обращения в 8 раз, необходимо увеличить радиус орбиты в $8^{2/3} = 4$ раз.

Кинетическую энергию спутника находим, выразив из (1) квадрат скорости $v^2 = GM/R$:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GmM}{2R}\,, \tag{4}$$

где m — масса спутника. Из (4) следует, что кинетическая энергия спутника обратно пропорциональна радиусу орбиты. Таким образом, спутник на более низкой орбите обладает в 4 раза большей кинетической энергией.

4. Ответ: 10 млрд. лет.

За время термоядерного горения в Солнце выделится энергия

$$E = 0{,}007 M_{\text{г}} c^2 = 0{,}007\,(0{,}1 M_{\odot} c^2) = \\ = 0{,}007 \cdot 0{,}1 \cdot (2 \cdot 10^{30}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ Дж} = 1{,}26 \cdot 10^{44} \text{ Дж}.$$

Выделившаяся ядерная энергия уносится в космическое пространство излучением. Мощность солнечного излучения $L_{\odot}$ — светимость, равна, в частности, потоку излучения через сферу с радиусом, равным радиусу орбиты Земли:

$$L_{\odot} = JS = J\,4\pi R_{\text{З}}^2 = 1400 \cdot 4\pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^2 \text{ Вт} = 4{,}0 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

За искомое время T излучение унесёт энергию $L_{\odot}T$, равную E. Таким образом,

$$T = \frac{E}{L_{\odot}} = 3{,}2 \cdot 10^{17} \text{ с} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{17}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ лет} = 10 \text{ млрд. лет}.$$

Решение задач 11 класса

1. а) Молекул воды в стакане больше.

б) Ответ: 2,3 мкм.

а) Число звёзд в видимой части Вселенной $N_з = (200 \cdot 10^9) \cdot (10 \cdot 10^9) = 2 \cdot 10^{21}$. Масса воды в стакане $m_с = \rho \cdot 200$ см$^{-3}$ $= 200$ г, чему соответствует количество вещества $\nu_с = m_с/\mu = 11$ моль и число молекул

$$N_с = N_А \nu_с = N_А \frac{m_с}{\mu} = 6 \cdot 10^{23} \frac{200}{18} = 6{,}7 \cdot 10^{24}.$$

Таким образом, число молекул воды в стакане $N_с > N_з$.

б) Пусть d — искомый диаметр капли. Тогда объём капли $V = \pi d^3/6$, её масса $m_к = \rho V = \pi \rho d^3/6$, количество воды в капле $\nu_к = m_к/\mu = \pi \rho d^3/(6\mu)$, а число молекул

$$N_к = N_А \nu_к = N_А \frac{\pi \rho d^3}{6\mu}\,.$$

Приравниваем $N_к$ числу звёзд в галактике $N_г = 200$ млрд., находим требуемый радиус

$$r = \left(\frac{6\mu N_г}{\pi \rho N_А}\right)^{1/3} = \left(\frac{6 \cdot 18 \cdot (2 \cdot 10^{11})}{\pi \cdot 1 \cdot (6 \cdot 10^{23})}\right)^{1/3} \text{ см} = 2{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 2{,}3 \text{ мкм}$$

— это диаметр наиболее мелких капель тумана. Отметим, что глаз различает лишь самые крупные капли тумана диаметром 100 мкм.

2. На орбите Земли (и Луны) Солнце создаёт ускорение свободного падения $g_\odot = 0{,}60$ см/с^2, тогда как Земля создаёт примерно в 2 раза меньшее ускорение $g_З = 0{,}26$ см/с^2 на орбите Луны. Луна вращается вокруг Земли, поскольку отклонение гравитационного поля от однородного на орбите Луны определяется именно Землёй, а не Солнцем.

Земля равномерно движется вокруг Солнца с некоторой скоростью v по круговой орбите с радиусом $R_З$. Следовательно, планета имеет центростремительное ускорение

$$a_\odot = \frac{v^2}{R_З}\,.$$

Это ускорение обеспечивается притяжением Солнца, оно одинаково для Земли, Луны, и равно ускорению свободного падения к Солнцу на орбите Земли $g_\odot = GM_\odot/R_З^2$, где G — гравитационная постоянная, $M_\odot$ — масса Солнца. Скорость v связана с периодом обращения $T_З = 1$ год соотношением $vT = 2\pi R_З$, так что ускорение $g_\odot = a_\odot$ перепишем как

$$g_\odot = \frac{(2\pi R_З/T_З)^2}{R_З} = \frac{(2\pi)^2\, R_З}{T_З^2} = \frac{(2\pi)^2 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})}{(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}\ \text{м/с}^2 = 0{,}60\ \text{см/с}^2.$$

Аналогичным образом вычисляем ускорение свободного падения к Земле на орбите Луны, рассматривая движение Луны по круговой орбите вокруг Земли:

$$g_З = \frac{(2\pi)^2\, R_Л}{T_Л^2} = \frac{(2\pi)^2 \cdot (3{,}8 \cdot 10^8)}{(28 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}\ \text{м/с}^2 = 0{,}26\ \text{см/с}^2,$$

где $T_Л = 28$ дней ≈ 1 месяц — период обращения Луны. Ускорение свободного падения $g_\odot$ больше $g_З$, поэтому сила притяжения Луны к Солнцу

$$F_\odot = M_Л g_\odot = \frac{GM_Л M_\odot}{R_З^2}$$

примерно в 2 раза больше силы притяжения к Земле

$$F_З = M_Л g_З = \frac{GM_Л M_З}{R_Л^2}\,,$$

где $M_Л$ и $M_З$ — массы Луны и Земли.

Тем не менее Луна вращается вокруг Земли (и одновременно вокруг Солнца). Действительно, если бы притяжение между Землёй и Луной вообще отсутствовало, то эти объекты всё равно могли двигаться рядом, например, по одной окружности вокруг Солнца (в гравитационном поле тела с разными массами движутся по одинаковым траекториям, если их начальные координаты и скорости совпадают). Чтобы Луна не уходила от Земли и вращалась вокруг неё достаточно, чтобы на орбите Луны отклонения гравитационного поля от однородного определялись Землёй, а не Солнцем. Так, в диаметрально противоположных точках лунной орбиты центрально-симметричное гравитационное поле Земли одинаково по абсолютной величине, но направлено в противоположные стороны. Так что отклонение земного поля от однородного составляет $\Delta g_З = 2g_З = 0{,}51$ см/с^2 — порядка самого $g_З$. Напротив, солнечное гравитационное поле на орбите Луны практически однородно. Его неоднородность определяются небольшим изменением расстояния между Луной и Солнцем. Разность ускорений свободного падения, обусловленных Солнцем, в наиболее близкой и удалённой от Солнца точках лунной орбиты составляет

$$\Delta g_\odot = \frac{GM_\odot}{(R_З - R_Л)^2} - \frac{GM_\odot}{(R_З + R_Л)^2} = GM_\odot \frac{4R_З R_Л}{(R_З - R_Л)^2\,(R_З + R_Л)^2} \approx$$
$$\approx \frac{4GM_\odot R_Л}{R_З^3} = g_\odot \frac{4R_Л}{R_З} = 0{,}01 g_\odot = 0{,}006 \text{ см/с}^2,$$

что примерно в 100 раз меньше $\Delta g_З$.

3. Ответ: 6.

Движение звёзд на границе балджа и на удвоенном расстоянии определяется силами тяготения вещества, заключённого в сферах, которые охватывают рассматриваемые орбиты. Если V_1 — объём балджа, то объём V_2 шара, охватываемого второй орбитой, в $2^3 = 8$ раз больше, поскольку объём сферы пропорционален кубу её радиуса:

$$V_2 = 8V_1.$$

Пусть $\rho_с$ и $\rho_т$ — плотности светящегося и тёмного вещества. Тогда суммарная масса светящейся и тёмной материи в балдже

$$M_1 = (\rho_с + \rho_т)\, V_1, \tag{1}$$

а масса материи в объёме V_2

$$M_2 = \rho_с V_1 + \rho_т V_2 = \rho_с V_1 + \rho_т\,(8V_1) = (\rho_с + 8\rho_т)\, V_1. \tag{2}$$

Центростремительные ускорения звёзд v^2/R и $v^2/(2R)$ на рассматриваемых круговых орбитах с радиусами R и $2R$ равны соответствующим силам тяготения, делённым на массы звёзд:

$$\frac{v^2}{R} = G\,\frac{M_1}{R^2} = G\,\frac{(\rho_с + \rho_т)\, V_1}{R^2}\,, \tag{3}$$

$$\frac{v^2}{2R} = G\,\frac{M_2}{(2R)^2} = G\,\frac{(\rho_с + 8\rho_т)\,V_1}{(2R)^2}\,; \tag{4}$$

v — скорость движения звёзд. Делим (3) на (4):

$$\frac{1}{1/2} = \frac{\rho_с + \rho_т}{(\rho_с + 8\rho_т)/4}$$

и после ряда стандартных алгебраических преобразований: $(\rho_с + 8\rho_т)/4 = (\rho_с + \rho_т)/2$, $\rho_с + 8\rho_т = 2\rho_с + 2\rho_т$, $\rho_с = 6\rho_т$, получаем искомое отношение

$$\frac{\rho_с}{\rho_т} = 6.$$

4. Ответ: 580 нм.

При отражении каждый фотон изменяет свой импульс на противоположный и, следовательно, передаёт парусу импульс $2p$. Пусть за некоторое время t от паруса отразились N фотонов и, следовательно, передали ему суммарный импульс (импульс силы)

$$P = 2pN.$$

Сила, действующая на парус

$$F_ф = \frac{P}{t} = 2p\,\frac{N}{t}\,. \tag{1}$$

В отсутствие паруса рассматриваемые N фотонов перенесли бы через площадь паруса S энергию

$$E = wN$$

и обеспечили указанную в условии задачи плотность потока энергии

$$J = \frac{E}{St} = \frac{w}{S}\,\frac{N}{t}\,. \tag{2}$$

Выражаем из (2) отношение $N/t = JS/w$ и подставляем в (1):

$$F_ф = 2JS\,\frac{p}{w}\,. \tag{3}$$

Согласно условию задачи $w = pc$, что при подстановке в (3) определяет силу светового давления на парус

$$F_ф = \frac{2JS}{c}\,. \tag{4}$$

Пусть d — искомая толщина паруса. Тогда объём паруса $V = Sd$, а его масса $M = \rho Sd$. На парус действует сила притяжения Солнца

$$F_{\text{т}} = Mg_{\odot} = \rho Sdg_{\odot}, \tag{5}$$

где $g_{\odot}$ — ускорение свободного падения к Солнцу на орбите Земли. Ускорение $g_{\odot}$ одинаково для всех тел на орбите Земли (в гравитационном поле все тела приобретают одинаковые ускорения). Оно равно, в частности, центростремительному ускорению Земли a при движении вокруг Солнца со скоростью v по орбите радиуса $R_{З}$:

$$g_{\odot} = a = \frac{v^2}{R_{З}}\,. \tag{6}$$

Выражаем скорость v через период обращения $T = 1$ год: $v = 2\pi R_{З}/T$, и подставляем в (6):

$$g_{\odot} = \frac{(2\pi)^2 \, R_{З}}{T^2}\,. \tag{7}$$

Далее подставляем ускорение (7) в силу тяготения (5):

$$F_{\text{т}} = \rho Sd \, \frac{(2\pi)^2 \, R_{З}}{T^2}\,. \tag{8}$$

Парус преодолеет собственное притяжение к Солнцу, когда сила тяготения (8) окажется меньше силы давления излучения (4). Такое соотношение сил (8) и (4) достигается при толщине паруса

$$\begin{aligned} d < \left(\frac{2JS}{c}\right) \Big/ \left(\rho S \, \frac{(2\pi)^2 \, R_{З}}{T^2}\right) = \frac{2JT^2}{(2\pi)^2 \, c\rho R_{З}} = \\ = \frac{2 \cdot 1400 \cdot (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{(2\pi)^2 \cdot (3 \cdot 10^8) \cdot 2700 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})} = 5{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 580 \text{ нм}. \end{aligned} \tag{9}$$

Комментарии. Полученная толщина паруса совпадает с длиной волны света зелёного оттенка и примерно в 30 меньше толщины «конфетной» фольги.

Отметим, что в итоговую формулу (9) входит радиус орбиты Земли $R_{З}$ и плотность потока солнечного излучения J на Земле. Тем не менее толщина паруса, на самом деле, не зависит от удаления от Солнца. Действительно, плотность потока солнечного излучения J убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца R. Следовательно, сила давления излучения (4) также убывает обратно пропорционально R^2. Сила тяготения (5) убывает по тому же закону: $F_т \propto 1/R^2$. Поэтому отношение сил светового давления и тяготения не зависит от удаления от Солнца.

К тому же выводу можно прийти формально из итоговой формулы (9). Плотность потока J связана со светимостью Солнца $L_\odot = 4 \cdot 10^{26}$ Вт соотношением $J = L_\odot/(4\pi R^2)$. Квадрат периода обращения $T^2 = (2\pi)^2\, R^3/(GM_\odot)$, где $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$ — гравитационная постоянная, $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца. Подстановка последних выражений в (9) даёт ту же толщину, зависящую только от параметров Солнца $L_\odot$ и $M_\odot$, но не от R:

$$d < \frac{L_\odot}{2\pi c\rho G M_\odot} = 580 \text{ нм.}$$