Условия и решение задач
городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. Бориса Васильевича Кукаркина
06 декабря 2009 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. а) Где на земном шаре все звезды восходят и заходят перпендикулярно линии горизонта?

б) Где на земном шаре все звезды в течение года движутся параллельно горизонту?

2. Луна движется по небу с востока на запад, а относительно звёзд смещается в противоположном — восточном направлении. Объясните эти видимые противоположные движения.

3. а) Когда полная Луна поднимается выше всего над горизонтом: летом или зимой?

б) На какую высоту над горизонтом поднимается полная Луна в Нижнем Новгороде в июне и декабре? Географическая широта Нижнего Новгорода 56°, а северного тропика — 23° с. ш.

Примечание: на северном тропике Солнце находится в зените (вертикально вверху) в полдень летнего солнцестояния.

4. Движение планеты вокруг звёзды вызывает соответствующее периодическое колебание центра масс светила. В настоящее время астрономическая техника способна обнаруживать периодические движения звёзд с характерной скоростью 1 м/с. Какие из приводимых ниже эффектов важно учитывать при подобных измерениях:

а) периодические изменения скорости самой Земли из-за вращения вокруг Солнца;

б) периодические изменения скорости телескопа из-за суточного вращения вместе с Землёй;

в) периодические колебания скорости Земли из-за движения Луны вокруг неё.

Радиус Земли составляет 6400 км, Луна и Солнце удалены от Земли на расстояния 380 тыс. км и 150 млн. км соответственно. Луна обращается вокруг Земли за 27 суток. Масса Земли в 81 раз больше массы Луны. Длина окружности радиуса r равна $2\pi r$, где $\pi \approx 3{,}14$.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Почему на земном экваторе день всегда чуть продолжительнее ночи?

2. Белые ночи наступают, когда Солнце не опускается под горизонт ниже 6°. Определите, в каких географических широтах они могут наблюдаться. Угол между осью собственного вращения Земли и плоскостью движения Земли вокруг Солнца составляет $66{,}5^\circ$.

3. Определите отношение массы Земли к массе Марса, если спутник Фобос удалён от Марса на 9300 км и совершает оборот вокруг планеты за 7 часов 40 минут. Расстояние от Земли до Луны 380 тыс. км. Луна совершает оборот вокруг Земли за 27 суток.

4. Представьте себе невозможное: в недрах Солнца перестало существовать газовое давление. За какое время Солнце схлопнется до размера, много меньше своего начального радиуса? Радиус Солнца $R_\odot =$ 700 тыс. км, ускорение свободного падения на поверхности Солнца $g_\odot =$ 270 м/с^2.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. а) Докажите, что само по себе гравитационное поле Солнца не способно удержать электроны солнечной короны. Температура короны 10^6 К, вторая космическая скорость для Солнца 617 км/с, масса электрона 10^{-27} г, постоянная Больцмана $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

б) До какого электрического потенциала должно зарядиться Солнце, чтобы остановить убегание электронов? Электрический заряд электрона $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

2. Два спутника движутся вокруг Земли по близким круговым орбитам в одной и той же плоскости. В некоторый момент времени спутники сближаются на минимальное возможное расстояние между их орбитами. Какой угол будет составлять отрезок, соединяющий спутники, с вертикалью (направлением на Землю с одного из спутников) через один оборот аппаратов вокруг Земли?

3. Чтобы предотвратить перегрев спутника солнечными лучами, его запускают на такую круговую орбиту вокруг Солнца за Землёй, что спутник с отключенными двигателями постоянно находится в тени Земли. На каком расстоянии от Земли находится спутник? Масса Солнца больше массы Земли в 333 000 раз. Солнце удалено от Земли на 150 млн. км.

4. Энергия E некоторого гипотетического газа прямо пропорциональна объёму V, предоставленному этому газу: $E = \varepsilon V$, где объёмная плотность энергии газа $\varepsilon > 0$ — постоянная, не зависящая от предоставленного объёма (и температуры). Таким свойством обладает так называемая «тёмная энергия» в космологии, обеспечивающая ускоренное расширение Вселенной.

а) Покажите, что давление гипотетического газа—тёмной энергии отрицательно, рассматривая расширение Вселенной как адиабатический процесс.

б) Определите отношение величин плотности энергии и давления рассматриваемого газа.

Решение задач 8–9 классов

1. а) на экваторе; б) на северном и южном полюсах.

Звёзды вращаются вместе с небесной сферой вокруг оси, приближённо проходящей через наблюдателя и Полярную звезду. На экваторе Полярная звезда находится на линии горизонта, и соответствующая ось вращения лежит в горизонтальной плоскости. В результате все звёзды восходят и заходят перпендикулярно линии горизонта. На северном полюсе Полярная звезда находится в зените, и ось вращения расположена вертикально. Соответственно, все звёзды движутся параллельно горизонту. На южном полюсе ситуация аналогичная.

2. Противоположное движение объясняется одинаковыми направлениями вращения Земли вокруг своей оси и Луны вокруг Земли (в системе неподвижных звёзд).

Земля вращается вокруг своей оси существенно быстрее (за сутки), чем Луна совершает оборот вокруг Земли (примерно за месяц). Поэтому в течение суток Луна приближённо движется по небу так же, как звёзды и Солнце — с востока на запад.

Вместе с тем наблюдаемое вращение небосвода со звёздами противоположно по направлению собственному (суточному) вращению Земли в системе неподвижных звёзд. Луна обращается вокруг Земли (в системе неподвижных звёзд) в том же направлении, что и Земля вокруг своей оси. Соответственно Луна чуть отстаёт от звёзд в своём видимом движении по небу. Это отставание и выражается в медленном смещении Луны с запада на восток относительно звёзд на небе.

Если бы Луна обращалась вокруг Земли существенно быстрее, чем за сутки, то она вообще восходила на западе и заходила на востоке.

3. а) зимой; б) в июне примерно на 11°, в декабре — на 57°.

а) В полнолуние Солнце, Земля и Луна расположены примерно на одной прямой. Соответственно, Луна и Солнце находятся относительно Земли практически в диаметрально противоположных точках небесной сферы. Летом Солнце находится над северным тропиком, а полная Луна в диаметрально противоположной точке над южным тропиком. Зимой Солнце — над северным тропиком, а полная Луна — над южным. Таким образом, летом полная Луна поднимается на ту же высоту, что Солнце зимой. Аналогично, зимой полная Луна поднимается над горизонтом так же, как Солнце летом. Получаем, что зимой Луна поднимается выше над горизонтом.

б) В июне полная Луна находится в зените (вертикально вверху) на южном тропике. Соответственно, в Нижнем Новгороде Луна отклоняется от вертикали на разность широт нашего города и южного тропика — $56^\circ + 23^\circ = 79^\circ$, и поднимается над горизонтом на $90^\circ - 79^\circ = 11^\circ$.

Аналогично, в декабре полная Луна находится в зените над северным тропиком. В Нижнем Новгороде Луна отклоняется от вертикали на разность широт нашего города и северного тропика — $56^\circ - 23^\circ = 33^\circ$, и поднимается над горизонтом на $90^\circ - 33^\circ = 57^\circ$.

4. Все указанные эффекты важно учитывать, поскольку соответствующие скорости порядка или больше минимальной регистрируемой скорости 1 м/с.

Итак, существенными будут те эффекты, которые приводят к периодическим изменениям скорости Земли относительно звезды на величину порядка минимальной измеряемой скорости 1 м/с.

а) При вращении вокруг Солнца Земля проходит за год путь, равный длине её орбиты $2\pi R_{\text{З-С}}$, где $R_{\text{З-С}} = 150$ млн. км. Соответственно, Земля движется по орбите со скоростью

$$V_{\text{орб}} = \frac{2\pi R_{\text{З-С}}}{1\ \text{год}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 150 \cdot 10^6\ \text{км}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{с}} = 30\ \text{км/с},$$

что существенно больше 1 м/с.

б) При суточном вращении Земли телескоп проходит за сутки расстояние порядка длины экватора Земли — $2\pi R_{\text{З}}$, где $R_{\text{З}} = 6400$ км. Соответствующая скорость движения

$$V_{\text{сут}} = \frac{2\pi R_{\text{З}}}{1\ \text{сут}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6400 \cdot 10^3\ \text{м}}{24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{с}} = 470\ \text{м/с},$$

что также много больше 1 м/с.

в) Вращение Луны вокруг Земли означает, что система Земля—Луна вращается вокруг общего центра масс, который не совпадает с центром Земли. Таким образом, Земля вращается вокруг соответствующего центра с периодом, равным периоду вращения Луны вокруг Земли. Расстояния $R_{\text{Ц-З}}$ и $R_{\text{Ц-Л}}$ от центра масс системы до центров Земли и Луны обратно пропорциональны отношению масс небесных тел:

$$\frac{R_{\text{Ц-З}}}{R_{\text{Ц-Л}}} = \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} = \frac{1}{81}. \qquad (1)$$

Вместе с тем сумма расстояний $R_{\text{Ц-З}}$ и $R_{\text{Ц-Л}}$, очевидно, равна расстоянию от Земли до Луны $R_{\text{З-Л}} = 380$ тыс. км:

$$R_{\text{Ц-З}} + R_{\text{Ц-Л}} = R_{\text{З-Л}}. \qquad (2)$$

Выражаем из уравнения (1) расстояние $R_{\text{Ц-Л}} = (M_{\text{З}}/M_{\text{Л}})\,R_{\text{Ц-З}}$ и подставляем в уравнение (2): $R_{\text{Ц-З}} + (M_{\text{З}}/M_{\text{Л}})\,R_{\text{Ц-З}} = R_{\text{З-Л}}$. Получаем искомый радиус орбиты Земли

$$R_{\text{Ц-З}} = \frac{R_{\text{З-Л}}}{1 + (M_{\text{З}}/M_{\text{Л}})} = \frac{380\,000 \text{ км}}{1 + 81} = 4600 \text{ км}.$$

Соответствующая скорость движения Земли

$$V_{\text{лун}} = \frac{2\pi R_{\text{Ц-З}}}{27 \text{ сут}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4600 \cdot 1000 \text{ м}}{27 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с}} = 12 \text{ м/с}.$$

Последняя величина много больше 1 м/с.

Отметим, что расстояние $R_{\text{Ц-З}}$ меньше радиуса Земли 6400 км, так что центр масс системы Земля—Луна находится внутри Земли ближе к поверхности планеты, чем к её центру.

Решение задач 10 класса

1. Вследствие конечного углового размера Солнца (около половины градуса) и рефракции световых лучей в атмосфере Земли (отклонения их распространения от прямолинейного). Рефракция позволяет видеть удалённые объекты, находящиеся ниже математического горизонта примерно на полградуса (примерно на размер диска Солнца).

Днём считается интервал времени от восхода — момента появления верхнего края диска Солнца над видимым горизонтом, и закатом — моментом исчезновения всего диска Солнца за видимым горизонтом. Если бы Солнце было точечным объектом и не было земной атмосферы, то на экваторе продолжительности дня и ночи были одинаковыми. Вследствие конечного углового размера Солнца верхний край его диска появляется над горизонтом раньше, чем его центр. Угловой диаметр Солнца составляет полградуса, а радиус — четверть градуса. Полный оборот по небу в $360°$ Солнце совершает за 24 часа. Соответственно, утром верхний край диска появляется на $(0{,}25°/360°) \cdot 24 \cdot 60$ мин $= 1$ минуту раньше центра. Аналогично вечером верхний край заходит на 1 минуту позднее центра. В результате продолжительность дня увеличивается на 2 минуты, а продолжительность ночи сокращается на те же 2 минуты. В итоге день оказывается длиннее ночи на 4 минуты.

По сути рефракция представляет собой преломление лучей при переходе между средами с разными показателями преломления: из вакуума (с единичным показателем преломления) в атмосферу Земли (среду с показателем преломления больше единицы). Рефракция позволяет видеть удалённые точечные объекты, находящиеся ниже математического горизонта примерно на полградуса (практически угловой диаметр Солнца). В результате мы видим верхний край Солнца, когда он ещё (или уже) находится за математическим горизонтом примерно на целый диаметр Солнца. Таким образом рефракция, даёт в два раза больший эффект, чем конечность углового размера Солнца, и увеличивает разность длительностей дня и ночи на 8 минут.

В сумме конечный угловой размер Солнца и рефракция обуславливают отличие в 12 минут между длительностями дня и ночи.

2. Севернее 60,5° с. ш. и южнее 60,5° ю. ш.

В день летнего солнцестояния Солнце касается горизонта на широте, равной углу наклона оси вращения Земли к плоскости движения Земли вокруг Солнца — 66,5° с. ш. Соответственно, Солнце зайдёт за горизонт на 6° на северной широте $66{,}5° - 6° = 60{,}5°$. В более южных широтах (северного полушария) Солнце будет заходить за горизонт больше, чем на 6° не только в день солнцестояния, но и во все другие дни года. Напротив, севернее 60,5° наступит такой день (не обязательно совпадающий с днём солнцестояния), когда Солнце уйдёт за горизонт, но не глубже 6°. Таким образом, белые ночи можно наблюдать севернее 60,5° с. ш. и, аналогично, южнее 60,5° ю. ш. Санкт-Петербург находится на широте 60° — на границе области белых ночей.

3. Ответ: 9,5

Согласно второму закону Ньютона центростремительное ускорение Фобоса равно силе тяготения со стороны Марса, делённой на массу Фобоса:

$$\frac{V_{\Phi}^2}{R_{\Phi}} = \frac{GM_{\mathrm{M}}}{R_{\Phi}^2}\,, \tag{1}$$

где V_{Φ} — скорость Фобоса, R_{Φ} — радиус орбиты Фобоса, M_{M} — масса Марса, G — гравитационная постоянная. Выражаем скорость Фобоса V_{Φ} через радиус R_{Φ} и период T_{Φ} его обращения вокруг Марса, $V_{\Phi} = 2\pi R_{\Phi}/T_{\Phi}$, и подставляем в (1):

$$\frac{(2\pi)^2\, R_{\Phi}}{T_{\Phi}^2} = \frac{GM_{\mathrm{M}}}{R_{\Phi}^2}\,. \tag{2}$$

Уравнение (2) даёт выражение для массы Марса

$$M_{\mathrm{M}} = \frac{(2\pi)^2\, R_{\Phi}^3}{GT_{\Phi}^2} \tag{3}$$

через указанные в условии задачи величины R_{Φ}, T_{Φ} и фундаментальную постоянную G.

Аналогичное выражение получаем для массы Земли $M_З$ через радиус орбиты $R_Л$ и период обращения $T_Л$ Луны:

$$M_З = \frac{(2\pi)^2\, R_Л^3}{G T_Л^2}\,. \tag{4}$$

Отношение формул (4) и (3) даёт искомую величину

$$\frac{M_З}{M_М} = \frac{R_Л^3 T_Ф^2}{R_Ф^3 T_Л^2} = \frac{(380\,000\ \text{км})^3 \cdot (7\,\frac{2}{3}\ \text{ч})^2}{(9300\ \text{км})^3 \cdot (27 \cdot 24\ \text{ч})^2} = 9{,}5.$$

4. Ответ: за 30 минут.

Отключение давления означает остановку атомов (строго говоря, электронов и протонов) в газе Солнца. Остановленные «атомы» будут падать вертикально вниз к центру светила. При таком падении внешние части Солнца находятся в поле внутренних слоёв, масса которых постоянна и равна массе Солнца $M_\odot$. Таким образом, гравитационное поле на поверхности сжимающегося Солнца совпадает с гравитационным полем точечной массы $M_\odot$, помещённой в центр Солнца.

Согласно первому закону Кеплера в гравитационном поле точечной массы тела движутся по эллиптическим орбитам. В частности, исследуемое вертикальное падение на точечную массу $M_\odot$ происходит вдоль предельно вытянутого вдоль прямой эллипса, большая ось которого равна высоте падения — радиусу Солнца $R_\odot$. Время падения $T_{сж}$ равно половине периода обращения $T_{эл}$ по указанному эллипсу: $T_{сж} = T_{эл}/2$.

Согласно третьему закону Кеплера квадраты периодов обращения тел по эллиптическим орбитам пропорциональны большим полуосям орбит в третьей степени. Рассмотрим движение гипотетического спутника, который летит по круговой орбите вдоль поверхности Солнца. Большая полуось его эллиптической орбиты-окружности равна диаметру Солнца $2R_\odot$, что в 2 раза больше полуоси эллиптической орбиты исследуемого вертикального падения $R_\odot$. Следовательно,

$$\frac{T_{окр}^2}{T_{эл}^2} = \frac{(2R_\odot)^3}{R_\odot^3} = 8,$$

где $T_{окр}$ — период обращения гипотетического спутника. Искомое время сжатия

$$T_{\text{сж}} = \frac{T_{\text{эл}}}{2} = \frac{T_{\text{окр}}}{2\sqrt{8}}. \tag{1}$$

Центростремительное ускорение спутника $V^2/R_{\odot}$ на круговой орбите равно ускорению свободного падения $g_{\odot}$:

$$\frac{V^2}{R_{\odot}} = g_{\odot}. \tag{2}$$

Выражаем скорость спутника V через период его обращения $T_{\text{окр}}$ и радиус орбиты $R_{\odot}$, $V = 2\pi R_{\odot}/T_{\text{окр}}$, и подставляем в (2):

$$\frac{(2\pi)^2 R_{\odot}}{T_{\text{окр}}^2} = g_{\odot}. \tag{3}$$

Из последнего уравнения (3) находим период обращения

$$T_{\text{окр}} = 2\pi\sqrt{R_{\odot}/g_{\odot}}\,.$$

Согласно (1) и (3), определяем время сжатия:

$$T_{\text{сж}} = \frac{2\pi\sqrt{R_{\odot}/g_{\odot}}}{2\sqrt{8}} = \frac{\pi\sqrt{(700\,000 \cdot 10^3\ \text{м})/(270\ \text{м/с}^2)}}{\sqrt{8}} =$$
$$= 1800\ \text{с} = 30\ \text{мин}.$$

Решение задач 11 класса

1. а) Скорость теплового движения электронов примерно в десять раз превышает вторую космическую скорость, поэтому удержать электроны одним лишь гравитационным полем нельзя.

б) Ответ: 130 В.

а) Характерная тепловая кинетическая энергия электрона

$$\frac{mv_T^2}{2} = \frac{3}{2}\,kT, \tag{1}$$

где m — масса электрона, v_T — характерная скорость теплового движения электронов, T — температура короны, k — постоянная Больцмана. Из формулы (1) находим, что тепловая скорость частиц

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^6 \text{ Дж}}{10^{-27} \cdot 10^{-3} \text{ кг}}} = 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ м/с} = 6400 \text{ км/с}$$

примерно в 10 раз больше второй космической скорости. Таким образом, электроны покидали бы Солнце, если существовало только гравитационное поле.

б) Электроны несут на себе электрический заряд, поэтому их убегание приведёт к зарядке светила зарядом противоположного знака. Возникающее электрическое поле будет тормозить (притягивать) электроны к Солнцу.

Кинетическая энергия $mv^2/2$ убежавших электронов вдали от Солнца равна начальной механической энергии частиц на поверхности Солнца. Последняя складывается из кинетической энергии теплового движения (1) и потенциальной энергии qU, где U — электрический потенциал Солнца. Таким образом,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}\,kT + qU. \tag{2}$$

Убегание электронов прекратится, когда скорость электронов вдали от Солнца обратится в нуль. Согласно (2), электрическое поле остановит электроны при искомом потенциале

$$U = -\frac{3kT}{2q} = -\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^6 \text{ Дж}}{2 \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \text{ Кл}} = 130 \text{ В}.$$

При тепловом движении электроны движутся не с одной определённой скоростью, а с разными скоростями. Поэтому всегда найдутся частицы, которые имеют достаточно большую скорость, чтобы преодолеть электрическое притяжение Солнца. При найденном потенциале, строго говоря, происходит лишь существенное замедление убегания электронов.

2. $\mathrm{arctg}(3\pi) = 1{,}47$ рад $= 84^\circ$.

Пусть спутники движутся со скоростями v_1 и v_2 по круговым орбитам с радиусами r_1 и r_2. Их центростремительные ускорения v_1^2/r_1 и v_2^2/r_2 равны силе тяготения со стороны Земли, делённой на массы спутников:

$$\frac{v_1^2}{r_1} = \frac{GM}{r_1^2}\,, \qquad \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{GM}{r_2^2}\,, \tag{1}$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Находим из (1) выражения для скоростей спутников через радиусы их орбит:

$$v_1 = \sqrt{GM/r_1}\,, \qquad v_2 = \sqrt{GM/r_2}\,. \tag{2}$$

Пусть первый спутник совершил полный оборот, что произошло за время

$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1}\,. \tag{3}$$

За это время второй спутник пройдёт по своей орбите расстояние

$$L_2 = v_2 T_1 = 2\pi r_1 \frac{v_2}{v_1}\,, \tag{4}$$

где использовано выражение (3) для времени T_1. Расстояние (4) отличается от длины орбиты второго спутника $2\pi r_2$, поэтому он не попадает в исходную точку отправления в момент T_1 и будет отстоять от исходной точки отправления на расстоянии

$$L_{21} = L_2 - 2\pi r_2 = 2\pi r_1 \frac{v_2}{v_1} - 2\pi r_2 = \frac{2\pi\,(r_1 v_2 - r_2 v_1)}{v_1}\,, \tag{5}$$

где использовано выражение (4) для L_2. Подставляем в (5) скорости спутников v_1 и v_2, выраженные через r_1 и r_2 согласно (2):

$$L_{21} = \frac{2\pi\,(r_1/\sqrt{r_2} - r_2/\sqrt{r_1})}{1/\sqrt{r_1}} = \frac{2\pi\,(r_1^{3/2} - r_2^{3/2})}{\sqrt{r_2}}\,. \tag{6}$$

Тангенс искомого угла θ между отрезком, соединяющим спутники, и вертикалью равен отношению возникшего смещения между спутниками $|L_{21}|$ вдоль близких орбит и разности высот спутников $|r_2 - r_1|$:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{2\pi\left(r_1^{3/2} - r_2^{3/2}\right)}{\sqrt{r_2}\,(r_2 - r_1)}\right|. \tag{9}$$

Умножим числитель и знаменатель в (9) на $r_1^{3/2} + r_2^{3/2}$, используем формулу для разности квадратов $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{2\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right)}{\sqrt{r_2}\,(r_2 - r_1)\left(r_1^{3/2} + r_2^{3/2}\right)}\right|,$$

применим формулу для разности кубов $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ и сократим малые разности $r_2 - r_1$ в числителе и знаменателе:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{2\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}{\sqrt{r_2}\left(r_1^{3/2} + r_2^{3/2}\right)}\right| = \left|\frac{2\pi\left[(r_1/r_2)^2 + (r_1/r_2) + 1\right]}{(r_1/r_2)^{3/2} + 1}\right|.$$

В последнем выражении можно пренебречь отличием высот спутников и считать $r_1/r_2 = 1$, что даёт

$$\operatorname{tg}\theta = 3\pi.$$

Искомый угол $\theta = \operatorname{arctg}(3\pi) = 1{,}47$ рад $= 84^\circ$.

3. Ответ: 1,5 млн. км.

Центростремительное ускорение Земли $V_З^2/R_З$ при движении вокруг Солнца создаётся гравитационным полем Солнца:

$$\frac{V_З^2}{R_З} = \frac{GM_\odot}{R_З^2}, \tag{1}$$

где $V_З$ — орбитальная скорость Земли, $R_З$ — радиус орбиты Земли, $M_\odot$ — масса Солнца, G — гравитационная постоянная. Выражаем из (1) скорость Земли $V_З = \sqrt{GM_\odot/R_З}$ и находим период обращения планеты:

$$T_З = \frac{2\pi R_З}{V_З} = \frac{2\pi R_З^{3/2}}{\sqrt{GM_\odot}}. \tag{2}$$

Центростремительное ускорение спутника $V_\text{С}^2/(R_\text{З}+H)$ создаётся не только Солнцем, но и гравитационным полем Земли:

$$\frac{V_\text{С}^2}{R_\text{З}+H} = \frac{GM_\odot}{(R_\text{З}+H)^2} + \frac{GM_\text{З}}{H^2}\,, \tag{3}$$

где $V_\text{С}$ — скорость орбитального движения спутника вокруг Солнца, H — расстояние от Земли до спутника (соответственно, $R_\text{З}+H$ — расстояние от Солнца до спутника), $M_\text{З}$ — масса Земли. Выражаем из (3) скорость спутника

$$V_\text{С} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R_\text{З}+H} + \frac{GM_\text{З}\,(R_\text{З}+H)}{H^2}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R_\text{З}+H}}\sqrt{1+\frac{M_\text{З}}{M_\odot}\,\frac{(R_\text{З}+H)^2}{H^2}}$$

и находим период обращения спутника вокруг Солнца

$$T_\text{С} = \frac{2\pi\,(R_\text{З}+H)}{V_\text{С}} = \frac{2\pi\,(R_\text{З}+H)^{3/2}}{\sqrt{GM_\odot}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{M_\text{З}}{M_\odot}\,\frac{(R_\text{З}+H)^2}{H^2}}}\,. \tag{4}$$

Спутник будет постоянно находиться в тени Земли, если его период обращения (4) совпадает с периодом обращения Земли (2), что даёт уравнение на искомую высоту H:

$$\frac{(R_\text{З}+H)^{3/2}}{\sqrt{1+\frac{M_\text{З}}{M_\odot}\,\frac{(R_\text{З}+H)^2}{H^2}}} = R_\text{З}^{3/2}. \tag{5}$$

Возведём уравнение (5) в квадрат и перегруппируем множители между левой и правой частями уравнения:

$$(1+H/R_\text{З})^3 = 1 + \frac{M_\text{З}}{M_\odot}\,\frac{(R_\text{З}+H)^2}{H^2}. \tag{6}$$

Раскроем куб в левой части (6) по формуле

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = 1+3x\,(1+x+x^2/3)$$

и сократим единицы в левой и правой частях равенства (6):

$$3\,\frac{H}{R_\text{З}}\left[1+\frac{H}{R_\text{З}}+\frac{1}{3}\left(\frac{H}{R_\text{З}}\right)^2\right] = \frac{M_\text{З}}{M_\odot}\,\frac{(1+H/R_\text{З})^2}{(H/R_\text{З})^2}\,. \tag{7}$$

Перегруппируем множители между левой и правой частями равенства (7):

$$3\left(\frac{H}{R_З}\right)^3 \frac{1+(H/R_З)+(H/R_З)^2/3}{(1+H/R_З)^2} = \frac{M_З}{M_\odot}\,. \tag{8}$$

Левая часть уравнения (8) является монотонно растущей функцией параметра $x = H/R_З$, поэтому решение (8) единственно для произвольного отношения $M_З/M_\odot$. Поскольку отношение $M_З/M_\odot \ll 1$, то и величина $H/R_З \ll 1$ и ей можно пренебречь по сравнению с единицами в числителе и знаменателе дроби в левой части (8). Получаем

$$3\left(\frac{H}{R_З}\right)^3 = \frac{M_З}{M_\odot}\,.$$

Искомая высота спутника

$$H = R_З\left(\frac{M_З}{3M_\odot}\right)^{1/3} = 150\cdot 10^6\left(\frac{1}{3\cdot 333000}\right)^{1/3}\ \text{км} = 1{,}5\ \text{млн. км.}$$

4. а) У «обычного» газа энергия уменьшается при адиабатическом расширении. Энергия гипотетического газа, напротив, увеличивается, что указывает на отрицательное давление.

б) Ответ: −1.

а) При расширении некоторого начального объёма гипотетического газа его энергия увеличивается (в силу положительной величины плотности энергии ε). В адиабатическом процессе (без подвода тепла) энергия увеличивается за счёт работы над выделенным элементом газа окружающих его других частей газа. Для совершения положительной работы окружающий газ должен тянуть на себя выделенный элемент объёма, что и соответствует отрицательному давлению. При положительном давлении окружающий газ, напротив, сопротивлялся бы расширению и совершал отрицательную работу.

б) Запишем уравнение изменения энергии в адиабатическом процессе

$$\Delta E = p\,(-\Delta V),$$

где ΔE — изменение энергии газа при увеличении занятого им объёма на величину ΔV, p — давление. Для гипотетического газа $\Delta E = \varepsilon\,\Delta V$, что приводит к равенству

$$\varepsilon = -p.$$

Искомое отношение $\varepsilon/p = -1$.