Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике
и физике космоса им. А. Ф. Тарасова
02 февраля 2020 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Фаза Луны во время солнечного затмения:
1) первая четверть;
2) полнолуние;
3) третья четверть;
4) новолуние?

б) Ближайшая к Солнцу точка орбиты планеты:
1) апоастр;
2) восходящий узел;
3) перигелий;
4) эксцентриситет?

в) Во время солнечного затмения на Земле, температура поверхности Луны:
1) не изменяется;
2) понижается;
3) увеличивается?

г) Какое из расстояний наибольшее:
1) длина экватора;
2) расстояние от Земли до Луны;
3) высота полёта Международной космической станции?

д) Астрономическая единица равна расстоянию:
1) от Земли до Луны;
2) от Земли до Солнца;
3) от Солнца до звезды Проксима Центавра;
4) от Солнца до центра Галактики?

е) В 2019 году Роскосмос запустил спутник, который увидит все крупные скопления галактик во Вселенной:
1) «Радиоастрон»;
2) «Резонанс»;
3) «Спектр — рентген — гамма»;
4) «Миллиметрон»?

ж) Количество созвездий на всей небесной сфере:
1) 18; 2) 48; 3) 88; 4) 128?

2. Определите минимальную географическую широту местности, в которой возможен полярный день. Земная ось составляет угол $\varepsilon = 66°34'$ с плоскостью движения нашей планеты вокруг Солнца. Луч от звезды преломляется в земной атмосфере на угол $\gamma = 35'$, когда светило подходит к горизонту. Видимый угловой диаметр Солнца $\alpha = 30'$.

3. Две планеты обращаются вокруг звезды с периодами T_1 и T_2. Через какой промежуток времени повторяется одинаковое относительное расположение планет в системе?

4. Гранит не разрушается при максимальном давлении $3 \cdot 10^8$ Па. Оцените максимальную возможную высоту гор на Земле, если бы она определялась только прочностью их вещества типа гранита с плотностью 3 т/м^3. Сравните полученное значение с высотой Эвереста 8 848 м.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) В честь кого из учёных-астрофизиков пока не назвали космический телескоп:
   1) Кеплер;
   2) Пиблз;
   3) Спитцер;
   4) Хаббл?

б) Траектории большинства комет, когда-либо увиденных людьми:
   1) гиперболические;
   2) круговые;
   3) параболические;
   4) эллиптические?

в) Наиболее яркая планета на небе (в максимуме своего блеска):
   1) Венера;
   2) Марс;
   3) Сатурн;
   4) Юпитер?

г) Возраст Земли:
   1) 6,1 тыс. лет;
   2) 3,8 млн лет;
   3) 4,6 млрд лет;
   4) 14,7 млрд лет?

д) Космическое тело, упавшее на поверхность Земли:
   1) метеор;
   2) болид;
   3) комета;
   4) метеорит?

е) Какая планета быстрее всех совершает оборот вокруг своей оси:
   1) Меркурий;
   2) Венера;
   3) Марс;
   4) Юпитер?

ж) Сколько экзопланет открыто на начало 2020 года:
   1) примерно 80; 2) чуть больше 1 000;
   3) от 4 000 до 10 000; 4) более 10 000?

2. Гравитационные волны впервые были зарегистрированы 14.09.2015 с помощью лазерно-интерферометрической системы LIGO, которая состоит из обсерватории в Ливингстоне (30,6° с. ш., 90,8° з. д.) и Хэнфорде (46,5° с. ш., 119,4° з. д.). Сначала сигнал зарегистрировала обсерватория в Ливингстоне, а спустя 7 миллисекунд — в Хэнфорде. Объясните, чем обусловлена такая задержка, и определите максимальную возможную высоту источника сигнала над местным горизонтом (для воображаемого наблюдателя, находящегося точно по середине между Левингстоном и Хэнфордом). Гравитационная волна распространяется со скоростью света $c = 300\,000$ км/с. Длина земного экватора 40 000 км.

3. Космический корабль достиг системы из двух звёзд, выключил двигатели и лёг в дрейф на отрезке между светилами так, что система из указанных трёх объектов вращается без изменения расстояний между ними. Определите отношение масс звёзд $\alpha = M_2/M_1$, если известно отношение расстояний R_2 и R_1 от корабля до каждой из звёзд $\eta = R_2/R_1$.

4. Вимп (от англ. WIMP — weakly interacting massive particle) — слабо взаимодействующая массивная частица. Вимпы рассматриваются кандидатами на роль холодной тёмной материи, которая даёт около четверти вклада в общую плотность Вселенной. В некоторых теориях вимпы представляют собой нестабильные частицы с периодом полураспада больше современного возраста Вселенной. Пусть при распаде вимпа образуется фотон высокой энергии. Сколько примерно фотонов проходят за 1 с сквозь площадку 1 м^2 в Солнечной системе от распада вимпов в крупном скоплении галактик Кома (площадка ориентирована в направлении на источник с вимпами)? Полная масса скопления $M = 3 \cdot 10^{15} M_\odot$

($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца), и 90 % этой массы содержится в тёмной материи. Расстояние до скопления 100 Мпк (1 пк $= 3 \cdot 10^{16}$ м). Массу вимпов $m_\text{в}$ принять равной 50 массам протона $m_\text{p} = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг, а период полураспада вимпов $T_{1/2} = 10^{13}$ лет. Период полураспада — время, за которое распадается половина частиц. Площадь сферы радиуса r равна $4\pi r^2$.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Какой запуск космической ракеты энергетически наиболее выгодный:
   1) с южного полюса;
   2) с экватора на восток;
   3) с экватора на запад;
   4) с северного полюса?

б) Самый удалённый от Земли космический аппарат на начало 2020 года:
   1) «Вояджер-1»;
   2) «Вояджер-2»;
   3) «Новые горизонты»;
   4) «Пионер-10»?

в) Большúе полуоси орбит экзопланет и периоды их обращения вокруг своей звезды связаны между собой:
   1) первым законом Кеплера;
   2) вторым законом Кеплера;
   3) третьим законом Кеплера;
   4) четвёртым законом Кеплера?

г) Видимая звёздная величина звезды равна абсолютной, если расстояние до светила:
   1) 1 астрономическая единица;
   2) 1 парсек;
   3) 10 парсек;
   4) 10 световых лет?

д) Температура видимой поверхности Солнца по сравнению с температурой в центре Земли:
   1) в 2 раза выше;
   2) примерно такая же;
   3) в 1,5 раза ниже?

е) Поверхность какой из планет самая горячая:
   1) Меркурия;
   2) Венеры;
   3) Земли;
   4) Марса?

ж) Спутник с ретроградным движением по орбите:
   1) Фобос; 2) Ганимед; 3) Титан; 4) Тритон?

2. Оцените звёздную величину наиболее яркой «вспышки» спутника связи «Иридиум». «Вспышка» обусловлена отражением солнечного света в одном из плоских элементов спутника, как в зеркале, что порождает «солнечного зайчика» на поверхности Земли. Размер металлизированного плоского элемента примерно 90×180 см. Высота полёта спутника 800 км. Видимый угловой диаметр Солнца $0{,}5°$, а видимая звёздная величина светила $m_\odot = -26{,}7^\mathrm{m}$. Для объектов с принимаемыми световыми потоками F_1 и F_2 разность их звёздных величин m_1 и m_2 определена равенством $m_1 - m_2 = -2{,}5\lg(F_1/F_2)$. Площадь круга с радиусом r равна πr^2.

3. Система из двух чёрных дыр звёздной массы (вращающихся вокруг общего «центра масс») способна излучать гравитационные волны, доступные для регистрации современными «гравитационными» приёмникам. На какую частоту излучения следует настроить приёмник, чтобы зарегистрировать сигнал от слияния чёрных дыр в такой системе? Для оценок примите массу $M_\text{ч}$ каждого объекта в 20 масс Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Слияние происходит, когда радиусы орбит в системе уменьшаются примерно до радиуса чёрной дыры $r_G = 2GM_\text{ч}/c^2$ (так что объекты соприкасаются своими «поверхностями» и формируют новую общую «поверхность»). Здесь $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2) — гравитационная постоянная, $c = 300\,000$ км/с — скорость света.

4. Как должна зависеть плотность вещества от расстояния до центра эллиптической галактики, чтобы звёзды на круговых орбитах вращались вокруг центра данной звёздной системы с одинаковой для всех расстояний линейной скоростью? Для расчётов примите

распределение вещества сферически-симметричным, т. е. галактика представляет собой шар с неоднородным распределением массы по радиусу.

1. а) 4) Новолуние.
б) 3) Перигелий.
в) 1) Не изменяется.
г) 2) Расстояние от Земли до Луны.
д) 2) От Земли до Солнца.
е) 3) «Спектр — рентген — гамма».
ж) 3) 88.

2. $\boldsymbol{\varepsilon - \alpha/2 - \gamma = 65^\circ 44'}$**.**

Если бы ось Земли была ориентирована строго перпендикулярно плоскости движения планеты вокруг Солнца (эклиптике), в свою очередь, светило представляло бы собой точечный источник, а на планете отсутствовала бы атмосфера, то полярный день существовал бы только строго на полюсе. Вследствие наклона земной оси область полярного дня приобретает форму «шапки» (сферического сектора) около полюса. Угловой радиус сектора равен отклонению земной оси от нормали к плоскости эклиптики $\delta = 90^\circ - \varepsilon$. Соответственно, в случае точечного светила и в отсутствие атмосферы, минимальная широта местности с полярным днём совпадала бы с углом $90^\circ - \delta = \varepsilon = 66^\circ 34'$.

Под солнечным днём подразумевают время, когда в данной местности в течение всех 24 часов видна хотя бы какая-нибудь часть солнечного диска. В отсутствие атмосферы, на указанной широте ε за горизонт не заходил бы даже центр диска и над горизонтом всегда оставалась хотя бы половина светила. Поэтому вершина диска Солнца остаётся над горизонтом в более широкой приполярной области, угловой радиус которой больше на угловой радиус Солнца $\alpha/2 = 15'$ по сравнению с величиной δ. Соответственно, граница сектора с полярным днём понижается до широты $\varepsilon - \alpha/2 = 66^\circ 34' - 15' = 66^\circ 19'$.

Преломление лучей в атмосфере Земли обеспечивает видимость светила, даже когда последнее уже полностью зашло бы за горизонт в отсутствие атмосферы. Преломление «поднимает» Солнце над горизонтом на угол $\gamma = 35'$. Таким образом, приполярный сектор полярного дня дополнительно расширяется на величину γ. Искомая минимальная географическая широта местности с полярным днём достигает значения $\varepsilon - \alpha/2 - \gamma = 66^\circ 34' - 15' - 35' = 65^\circ 44'$.

3. $\boldsymbol{|T_1^{-1} - T_2^{-1}|^{-1} = T_1 T_2 / |T_1 - T_2|}$ **в случае сонаправленного движения планет по орбитам;**

$\boldsymbol{|T_1^{-1} + T_2^{-1}|^{-1} = T_1 T_2 / |T_1 + T_2|}$ **в случае взаимно противоположного движения планет.**

Планетарная система проходит все свои возможные конфигурации в периодической последовательности. В качестве начала этой последовательности может быть выбрана любая конфигурация, например, когда планеты находятся на одном луче, исходящем от звезды. Искомый период совпадает с интервалом времени, за который система проходит все возможные конфигурации и возвращается к исходному состоянию: для выбранного начала последовательности обе планеты вновь оказываются на одном луче.

За некоторое время t каждая из планет проходит долю своего полного оборота по орбите $\alpha_1 = t/T_1$ и $\alpha_2 = t/T_2$ соответственно. Если планеты вращаются в одну сторону, то они вновь окажутся на одном луче, когда одна из них совершит на один оборот больше, чем вторая:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = 1. \tag{1}$$

Если планеты вращаются в противоположные стороны, то они попадут на один луч, когда доли поворота каждой из них в сумме составят один полный оборот:

$$|\alpha_1 + \alpha_2| = 1. \tag{2}$$

Подставляем определения $\alpha_1 = t/T_1$ и $\alpha_2 = t/T_2$ в уравнения (1) и (2):

$$|t/T_1 - t/T_2| = t\,|1/T_1 - 1/T_2| = 1$$

и

$$|t/T_1 + t/T_2| = t\,|1/T_1 + 1/T_2| = 1.$$

Получаем искомый период

$$t = \frac{1}{|1/T_1 - 1/T_2|} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$$

в случае сонаправленного движения планет и

$$t = \frac{1}{|1/T_1 + 1/T_2|} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 + T_2|}$$

в случае противонаправленного вращения.

Планеты образуются из общего вращающегося пылевого облака (диска) на стадии формирования звезды. Поэтому их общее происхождение обеспечивает вращение в одну сторону. В свою очередь, если центральное тело «захватывает» пролетающий объект на орбиту вокруг себя, то возможно формирование системы с ретроградным движением. Примером служит Тритон — крупнейший спутник Нептуна, предположительно захваченный планетой из пояса Койпера.

4. 10 км; немного выше Эвереста.

Центральную часть горы можно представить в виде вертикального цилиндра с основанием достаточно произвольной формы (квадратной, круговой или в виде ленты для горного хребта), площадь которого S. Высота цилиндра равна высоте h горы (хребта). Объём цилиндра V равен Sh (как для прямого параллелепипеда), а его масса $m = \rho V = \rho Sh$, где $\rho = 3$ т/м^3 — плотность гранита.

Выделенная центральная часть горы давит на подстилающее основание с силой F, равной силе тяжести mg ($g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения). Тем самым вершина создаёт под собой давление $p = F/S = mg/S = \rho Shg/S = \rho gh$ (вариант формулы для гидростатического давления). Приравнивая давление ρgh максимальному допустимому значению $p_{\text{макс}}$ без разрушения материала, находим максимальную возможную высоту горы $h_{\text{макс}} = p_{\text{макс}}/(\rho g) = 3 \cdot 10^8$ Па$/(3\,000$ кг/м$^3 \times 10$ м/с$^2) = 10\,000$ м $= 10$ км.

1. **а) 2) Пиблз.**
б) 4) Эллиптические.
в) 1) Венера.
г) 3) 4,6 млрд лет.
д) 4) Метеорит.
е) 4) Юпитер.
ж) 3) От 4 000 до 10 000.

2. 46°.

Сигнал в виде гравитационной волны представляет собой расширяющуюся сферу (сферический слой), на которой сосредоточено возмущение ускорения свободного падения (точнее, метрики пространства — времени). Центр сферы совпадает с положением источника сигнала, а радиус сферы увеличивается со скоростью света c. Приёмник регистрирует сигнал, когда указанная сфера возмущений пересекает местоположение детектора.

Поэтому задержка в приёме сигнала в разных пунктах на Земле связана тем, что сфера возмущений проходит через эти пункты в разное время. Если приёмные пункты расположены на отрезке, перпендикулярном направлению на источник, то сфера возмущений проходит по детекторам одновременно и задержка отсутствует. В свою очередь, если пункты расположены строго на одном луче в направлении на источник, то временная задержка равна времени, которое требуется сигналу пройти расстояние между пунктами d со скоростью $c = 300\,000$ км/с.

В общем случае временная задержка в приёме определяется разностью расстояний от приёмных пунктов до источника сигнала. Если пространственный отрезок между приёмными пунктами составляет некоторый угол θ с направлением на источник, то указанная разность расстояний равна $d\cos\theta$ — проекции отрезка на направление на источник. Получаем временную задержку в приёме сигналов $\tau = (d\cos\theta)/c$.

Вместе с тем при известной величине τ последнее равенство определяет отклонение θ направления на источник от линии пунктов на Земле:

$$\theta = \arccos(c\tau/d). \tag{1}$$

Таким образом, возможные источники принятого сигнала могут располагаться на конической поверхности в виде направлений, составляющих угол θ с прямой, соединяющей пункты на Земле. Указанная коническая поверхность поднимается над местным горизонтом в точности на угол θ (который и требуется найти в задаче).

Расстояние между пунктами оценим в приближении локально плоской поверхности Земли. Расстояние между пунктами по линии «север — юг» определяется разностью $|\Theta_Л - \Theta_Х|$ широт пунктов $\Theta_Л = 30{,}6°$ и $\Theta_Х = 46{,}5°$:

$$d_{\text{с-ю}} = L_э\,|\Theta_Л - \Theta_Х|/360°. \tag{2}$$

где $L_э = 40\,000$ км — длина экватора.

В свою очередь, линия постоянной широты представляет собой окружность, радиус и длина которой меньше радиуса и длины экватора в $1/(\cos\Theta)$ раз. В качестве широты Θ примем среднее значение широт пунктов $(\Theta_Л + \Theta_Х)/2 = 38{,}6°$. Тогда расстояние между пунктами по линии «восток — запад» определяется аналогично формуле (2) с заменой длины экватора на длину линии постоянной широты $L_э \cos[(\Theta_Л + \Theta_Х)/2)]$, а значения широт — на значения долгот $\varphi_Л = 90{,}8^\circ$ и $\varphi_Х = 119{,}4^\circ$:

$$d_{\text{в-з}} = L_э \cos[(\Theta_Л + \Theta_Х)/2)]\,|\varphi_Л - \varphi_Х|/360^\circ. \tag{3}$$

Полное расстояние между пунктами находим по теореме Пифагора:

$$d = \left(d^2_{\text{с-ю}} + d^2_{\text{в-з}}\right)^{1/2} = L_э \left\{|\Theta_Л - \Theta_Х|^2 + \cos^2[(\Theta_Л + \Theta_Х)/2)]\,|\varphi_Л - \varphi_Х|^2\right\}^{1/2}/360^\circ =$$
$$= 40\,000 \text{ км} \times \left\{|30{,}6^\circ - 46{,}5^\circ|^2 + \cos^2(38{,}6^\circ)\,|90{,}8^\circ - 119{,}4^\circ|^2\right\}^{1/2}/360^\circ =$$
$$= 40\,000 \text{ км} \times \left(15{,}9^2 + 0{,}782^2 \times 28{,}6^2\right)^{1/2}/360 = 3\,050 \text{ км}.$$

Подставляем полученное расстояние d в формулу (1):

$$\theta = \arccos\left(\frac{300\,000 \text{ км/с} \times 0{,}007 \text{ с}}{3\,050 \text{ км}}\right) = \arccos(0{,}69) \approx 46^\circ.$$

3. $\boldsymbol{\alpha = \eta^3\,(\eta^2 + 3\eta + 3)/(3\eta^2 + 3\eta + 1)}$.

Поскольку расстояния в системе постоянны, то звёзды вращаются по окружностям вокруг общего центра масс, который расположен на некоторых расстояниях $r_{\text{цм-1}}$ и $r_{\text{цм-2}}$ до каждой из звёзд. Взаимное притяжение светил обеспечивает соответствующее центростремительное ускорение $\omega^2 r_{\text{цм-1}}$ и $\omega^2 r_{\text{цм-2}}$ для каждого объекта:

$$\omega^2 r_{\text{цм-1}} = \frac{GM_2}{(R_1 + R_2)^2}\,, \qquad \omega^2 r_{\text{цм-2}} = \frac{GM_1}{(R_1 + R_2)^2}\,,$$

где ω — угловая частота вращения системы вокруг её центра масс, G — гравитационная постоянная. Складываем последние уравнения Ньютона для ускорений и учитываем, что $r_{\text{цм-1}} + r_{\text{цм-2}} = R_1 + R_2$ — расстояние между звёздами. Получаем выражение для квадрата угловой частоты вращения системы

$$\omega^2 = \frac{G\,(M_1 + M_2)}{(R_1 + R_2)^3} = \frac{GM_1}{R_1^3}\,\frac{1 + \alpha}{(1 + \eta)^3} \tag{4}$$

(третий закон Кеплера в двойной системе). Здесь $\alpha = M_2/M_1$ — отношение масс компонент системы, $\eta = R_2/R_1$ — отношение расстояний от корабля до звёзд.

Расстояние от первой звезды до центра масс составляет величину

$$r_{\text{цм-1}} = \frac{M_2\,(R_1 + R_2)}{M_1 + M_2} = \frac{\alpha\,(R_1 + R_2)}{1 + \alpha} = \frac{R_1 \alpha\,(1 + \eta)}{1 + \alpha}\,. \tag{5}$$

Тогда космический корабль удалён от центра масс на «расстояние»

$$r_{\text{цм-к}} = R_1 - r_{\text{цм-1}} = \frac{R_1\,(1 - \alpha\eta)}{1 + \alpha}\,. \tag{6}$$

Можно показать, что корабль смещён от центра масс к более лёгкой звезде. Поэтому величина $r_{\text{цм-к}}$ положительна, если вторая звезда легче ($\alpha < 1$), и отрицательна, если $\alpha > 1$.

Притяжение корабля к звёздам должно обеспечить необходимое центростремительное ускорение:

$$\omega^2 r_{\text{цм-к}} = \frac{GM_1}{R_1^2} - \frac{GM_2}{R_2^2}\,. \tag{7}$$

Последнее уравнение «автоматически» справедливо при любом отношении масс α и не требует постановки модулей у каких-либо величин. Подставляем в уравнение Ньютона для станции (7) выражение (4) для квадрата частоты и выражение (6) для расстояния $r_{\text{цм-к}}$, а также нормируем силы в правой части (7) на силу притяжения к первой звезде GM_1/R_1^2:

$$\left[\frac{GM_1}{R_1^3}\,\frac{1+\alpha}{(1+\eta)^3}\right]\frac{R_1\,(1-\alpha\eta)}{1+\alpha} = \frac{GM_1}{R_1^2}\,\left(1-\frac{\alpha}{\eta^2}\right).$$

После сокращения общих множителей в последнем уравнении приходим к равенству

$$\frac{1-\alpha\eta}{(1+\eta)^3} = 1 - \frac{\alpha}{\eta^2}\,. \tag{8}$$

Уравнение (8) линейно для искомого отношения масс α, что позволяет найти его решение в явном виде:

$$\alpha = \frac{1-(1+\eta)^{-3}}{\eta^{-2}-\eta\,(1+\eta)^{-3}} = \eta^2\,\frac{(1+\eta)^3-1}{(1+\eta)^3-\eta^3} = \eta^2\,\frac{\eta^3+3\eta^2+3\eta}{1+3\eta^2+3\eta} = \eta^3\,\frac{\eta^2+3\eta+3}{3\eta^2+3\eta+1}\,.$$

Если рассматривать последнее выражение как уравнение для параметра $\eta = R_2/R_1$ относительно параметра $\alpha = M_2/M_1$, то оно определяет положение одной из пяти так называемых точек Лагранжа (точки L_1, которая расположена между массивными телами). При малом отношении масс ($\alpha \ll 1$, например, для системы Солнце — Земля) решение позволяет выразить в явном виде расстояние от лёгкого тела до первой точки Лагранжа: $\eta = (\alpha/3)^{1/3}$.

4. 0,9 ≈ 1.

Распад вимпов создаёт одинаковое излучение во всех точках, удалённых на одинаковое расстояние от скопления галактик — источника. Указанные точки образуют поверхность в виде сферы с центром в источнике. В частности, Солнечная система находится на сфере с радиусом, равным расстоянию $r = 100$ Мпк до скопления галактик Кома (1 пк $= 3\cdot10^{16}$ м).

Пусть за время t' в скоплении галактик распались N' вимпов и, соответственно, породили N' фотонов. Последние уходят от скопления равномерно во всех направлениях и пересекают указанную сферу с радиусом r. Если вся сфера «перехватывает» все фотоны, то площадка $\Delta S = 1$ м^2 «перехватывает» лишь долю фотонов, равную отношению площади ΔS к площади всей сферы $4\pi r^2$. Соответственно, через площадку ΔS пройдут $n' = N'\,\Delta S/(4\pi r^2)$ фотонов за время t'.

В свою очередь, за интервал $\Delta t = 1$ с площадку пересекут фотоны в количестве p', пропорциональном отношению времени наблюдения Δt к времени t':

$$p' = n'\,\frac{\Delta t}{t'} = \frac{N'\,\Delta S\,\Delta t}{4\pi r^2 t'}\,. \tag{9}$$

Число N вимпов в скоплении галактик Кома равно отношению массы тёмной материи ηM к массе одного вимпа $m_{\text{в}} = 50 m_{\text{p}}$ ($m_{\text{p}} = 1{,}7\cdot10^{-27}$ кг — масса протона):

$$N = \eta M/m_{\text{в}},$$

где $\eta = 90$ % — доля тёмной материи, $M = 3 \cdot 10^{15} M_\odot$ — полная масса скопления ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца). За время $t' = T_{1/2} = 10^{13}$ лет в системе распадётся половина вимпов ($N' = N/2 = \eta M/(2m_\text{в})$).

Подставляем последние значения t' и N' в выражение (9), что определяет искомое число

$$p' = \frac{(N/2)\,\Delta S\,\Delta t}{4\pi r^2 T_{1/2}} = \frac{[\eta M/(2m_\text{в})]\,\Delta S\,\Delta t}{4\pi r^2 T_{1/2}} =$$
$$= \frac{\{0{,}9 \times [(3 \cdot 10^{15}) \cdot (2 \cdot 10^{30}\ \text{кг})]/(2 \times 50 \times 1{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{кг})\} \times 1\ \text{м}^2 \times 1\ \text{с}}{4 \times 3{,}14 \times [(100 \cdot 10^6) \times (3 \cdot 10^{16}\ \text{м})]^2\,[10^{13}\ \text{лет} \times (365 \times 24 \times 3600)\ \text{с/год}]} = 0{,}9 \approx 1.$$

1. а) 2) С экваторе на восток.
б) 1) «Вояджер-1».
в) 3) Третьим законом Кеплера.
г) 3) 10 парсек.
д) 2) Примерно такая же.
е) 2) Венеры.
ж) 4) Тритон.

Примечание. Температура поверхности Венеры почти одинакова на дневной и ночной стороне и составляет примерно 470 °C. Последнее значение превышает температуру 430 °C на дневной стороне Меркурия.

2. $m = -8{,}3^{\mathrm{m}}$.

Если бы плоский элемент спутника (антенна) представлял собой бесконечную плоскость, то в нём было бы видно изображение всего диска Солнце (как в ровной водной поверхности типа лужи или озера). В таком пределе звёздная величина вспышки совпала бы с аналогичной величиной источника $m_\odot = -26{,}7^{\mathrm{m}}$.

Свет на Земле от изображения Солнца в антенне-зеркале такой, как если бы источник в виде светила поместили в направлении за зеркалом на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли. В свою очередь зеркало конечных размеров становится эквивалентным прямоугольному отверстию в бесконечном непрозрачном экране, через который видно светило сквозь такой экран. Тогда предел максимальной возможной яркости вспышки $m_\odot = -26{,}7^{\mathrm{m}}$ сохранялся бы, если бы через «отверстие» был виден весь диск Солнца, для чего угловой размер отражающего элемента должен превышать превышать видимый угловой диаметр светила 0,5°.

Однако видимый угловой размер антенны $a/h < 2$ м/800 км $= 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ рад существенно меньше соответствующей величины для Солнца $\theta_\odot = 0{,}5° = 0{,}5 \times \pi/180°$ рад $=$ $= 8{,}7 \cdot 10^{-3}$ рад. (Здесь $a < 2$ м — размер антенны, $h = 800$ км — высота полёта спутника.) Поэтому в зеркале-антенне (вспомогательном «отверстии» в экране) видно с Земли только часть диска Солнца. Тогда поток излучения в «солнечном зайчике» на Земле F составляет такую долю от потока излучения от полного Солнца $F_\odot$, какую долю диска Солнца видно в отражающем элементе. Указанная доля есть отношение площади отражателя ab на спутнике к площади круга, который на высоте полёта спутника в точности перекрывал бы диск Солнца ($a = 90$ см и $b = 180$ см — размеры отражателя). Диаметр d указанного круга равен $h\theta_\odot$, а его площадь $S_\odot = \pi\,(d/2)^2 = \pi h^2\theta^2/4$. Таким образом, находим отношение потоков на Земле от отражателя и полного Солнца $F/F_\odot = ab/[\pi h^2\theta^2/4]$ и искомую максимальную звёздную величину «вспышки» спутника

$$m = m_\odot - 2{,}5\lg(F/F_\odot) = m_\odot - 2{,}5\lg\left(\frac{4ab}{\pi h^2\theta^2}\right) =$$

$$= -26{,}7^{\mathrm{m}} - 2{,}5\lg\left(\frac{4 \times 0{,}9\ \text{м} \times 1{,}8\ \text{м}}{3{,}14 \times (800\,000\ \text{м})^2 \times (8{,}7 \cdot 10^{-3})^2}\right) = -8{,}3^{\mathrm{m}}.$$

3. 560 Гц ≈ 600 Гц.

Для оценки частоты вращения системы будем рассматривать чёрные дыры как материальные точки с массами M_1 и M_2 (не обязательно одинаковыми). Они вращаются вокруг общего центра масс по окружностям с некоторыми радиусами R_1 и R_2. Соответствующее центростремительное ускорение обеспечено взаимным притяжением объектов:

$$\omega^2 R_1 = \frac{GM_2}{(R_1+R_2)^2}\,, \qquad \omega^2 R_2 = \frac{GM_1}{(R_1+R_2)^2}\,, \tag{1}$$

где ω — угловая частота вращения системы. Сложив уравнения (1), находим квадрат угловой скорости вращения

$$\omega^2 = \frac{G\,(M_1+M_2)}{(R_1+R_2)^3}$$

(третий закон Кеплера для двойной системы). Подставляем в последнее выражение расстояния R_1 и R_2 в виде радиусов чёрных дыр $r_G = 2GM_{\text{ч}}/c^2$:

$$\omega^2 = \frac{c^6}{8G^2\,(M_1+M_2)^2}\,,$$

и находим частоту вращения системы для $M_1 = M_2 = 20M_\odot$:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c^3}{4\sqrt{2}\,\pi G\,(M_1+M_2)} =$$

$$= \frac{(3\cdot 10^8 \text{ м/с})^3}{4\times 1{,}41\times 3{,}14\times [6{,}7\cdot 10^{-11}\text{ м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)]\times(40\cdot 2\cdot 10^{30}\text{ кг})} = 280 \text{ Гц} \approx 300 \text{ Гц}.$$

В случае одинаковых чёрных дыр, гравитационное поле в системе повторяет своё распределение не через период вращения системы $T = 1/\nu$, а через половину периода: чёрные дыры меняются местами и создают то же гравитационное поле в системе. Частота излучаемой гравитационной волны совпадает с частотой изменения гравитационного поля и, следовательно, равна удвоенной частоте вращения системы $2\nu = c^3/[2\sqrt{2}\pi G\,(M_1 + M_2)] \approx 600$ Гц.

4. Обратно пропорционально квадрату расстояния до центра галактики.

Движение звезды по круговой орбите с некоторым радиусом r внутри сферически-симметричной галактики определяется её притяжением звёздами, расположенными внутри сферы, по поверхности которой проходит орбита, как по экватору (большому кругу). В свою очередь, звёзды вне указанной сферы создают нулевое гравитационное поле (ускорение свободного падения) на орбите и поэтому не влияют на движение выбранной звезды.

Звёзды внутри выбранной сферы создают на орбите ускорение свободного падения $g(r)$ такое же, как точечное тело с той же массой $m(r)$, помещённое в центр галактики:

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$$

($m(r)$ — масса звёзд внутри сферы с радиусом r; G — гравитационная постоянная). Ускорение свободного падения совпадает с центростремительным ускорением v^2/r на орбите:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{Gm(r)}{r^2}\,.$$

Данное уравнение определяет, как масса $m(r)$ «звёздного» шара внутри галактики зависит от его радиуса:

$$m(r) = rv^2/G.$$

В случае постоянной скорости v движения по орбите произвольного радиуса, масса $m(r)$ пропорциональна радиусу r. Соответственно, масса Δm, заключённая в слое между двумя сферами с радиусами r_1 и r_2, зависит только от его толщины $\Delta r = r_2 - r_1$:

$$\Delta m = m(r_2) - m(r_1) = (r_2 - r_1)\, v^2/G = \Delta r\, v^2/G. \tag{2}$$

Чтобы определить плотность вещества в галактике $\rho(r)$ на некоторой удалённости r от её центра, выделим сферический слой с малой толщиной $\Delta r \ll r$, содержащий внутри себя сферу с радиусом r. Объём тонкого слоя произвольной формы равен произведению его площади (одной из сторон) на его толщину. В частности, объём ΔV рассматриваемого сферического слоя равен $4\pi r^2\, \Delta r$, а его масса

$$\Delta m = \rho(r)\, \Delta V = 4\pi r^2\, \Delta r\, \rho(r) \tag{3}$$

(изменением плотности вещества $\rho(r)$ внутри тонкого слоя пренебрегаем).

Приравниваем выражения (2) и (3) для массы слоя, которые пропорциональны толщине слоя и поэтому вспомогательная величина Δr «выпадает». Получаем искомый радиальный профиль концентрации

$$\rho(r) = \frac{v^2}{4\pi r^2 G} = \frac{\mathrm{const}}{r^2} \propto r^{-2}\,.$$