Условия и решение задач
Открытой городской олимпиады по астрономии, астрофизике и физике космоса им. Владимира Вячеславовича Радзиевского
30 января 2011 г.

8–9 классы

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Первый искусственный спутник Земли запущен:
1) 4 октября 1957 года в СССР,
2) 7 октября 1959 года в США,
3) 12 апреля 1961 года в СССР.

б) Первый человек, вступивший на Луну 21 июля 1969 года:
1) Юрий Гагарин,
2) Нил Армстронг,
3) Эдвин Олдрин.

в) Солнце можно увидеть в северном направлении:
1) только из южного полушария,
2) на экваторе в зимнее время,
3) на части России летом.

г) Туманность Ориона видна на небе:
1) зимой в Нижегородской области,
2) летом в Нижегородской области,
3) лишь в южном полушарии.

д) Диаметр Солнца больше диаметра Земли:
1) в 100 раз,
2) в 1 000 раз,
3) в 10 000 раз.

е) Свет проходит расстояние от Земли до Луны и обратно:
1) за 3 миллисекунды,
2) за 3 секунды,
3) за 3 минуты.

ж) Искусственные спутники Земли энергетически выгоднее запускать:
1) на юг, 2) на запад, 3) на восток.

2. Предположим, Вы находитесь в закрытом помещении без окон (например, в пещере). К потолку подвешен груз на нити. Как по качанию груза определить, в каком полушарии Вы находитесь: в северном или южном? Считайте, что колебания груза не затухают.

3. Во время лунного затмения диаметр тени от Земли на Луне примерно в 2,5 раза больше диаметра Луны. Вместе с тем во время солнечного затмения края Луны и Солнца практически совпадают. Исходя из этих данных определите, во сколько раз диаметр Земли больше диаметра Луны.

4. Вращение Венеры и Земли вокруг Солнца происходит практически в резонансе. Периоды обращения планет вокруг Солнца соотносятся как 8 : 13 (с относительной точностью около 0,0003).

а) Определите время (период), через которое конфигурация системы Солнце—Венера—Земля возвращается в исходное состояние относительно неподвижных звёзд.

б) Сколько раз за это время Земля и Венера сближаются на минимальное расстояние.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Солнце можно увидеть в северном направлении:
   1) только из южного полушария,
   2) на экваторе в зимнее время,
   3) на части России летом.

б) Туманность Ориона видна на небе:
   1) зимой в Нижегородской области,
   2) летом в Нижегородской области,
   3) лишь в южном полушарии.

в) На экваторе Земли ночь всегда:
   1) длится половину суток,
   2) короче половины суток,
   3) длиннее половины суток.

г) Масса Солнца больше массы Земли:
   1) в 330 000 раз,
   2) в 3 300 раз,
   3) в 330 раз.

д) Свет проходит расстояние от ближайшей звезды до Солнца:
   1) за 2 года,
   2) за 3 года,
   3) за 4 года.

е) Искусственные спутники Земли энергетически выгоднее запускать:
   1) на юг,
   2) на запад,
   3) на восток.

ж) Чтобы покинуть Солнечную систему, телу на Земле необходимо придать минимальную скорость:
   1) 7,9 км/с, 2) 16,6 км/с, 3) 44,7 км/с.

2. Каким станет период обращения Земли вокруг Солнца, если масса Земли увеличится до массы Солнца и объекты продолжат вращение с прежним расстоянием между ними по круговым орбитам?

3. Оцените, сколько метров воды в год испарялось бы с поверхности Тихого океана в районе экватора, если бы вся энергия падающего солнечного излучения расходовалась на испарение. Плотность потока энергии солнечного излучения на орбите Земли составляет 1,4 кВт/м^2, удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг.

4. Предположим, что в Антарктиде прокопали шахту до центра Земли. С какой скоростью следует запускать пушечное ядро со дна шахты, чтобы ядро не вернулось на Землю? Ускорение свободного падения на поверхности Земли 10 м/с^2, радиус Земли 6 400 км, трением о воздух пренебречь. Считайте известным, что гравитационное поле внутри однородной сферической оболочки равно нулю.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

1. Выберите наиболее точный ответ на каждый вопрос.

а) Солнце можно увидеть в северном направлении:
1) только из южного полушария,
2) на экваторе в зимнее время,
3) на части России летом.

б) Земля находится ближе всего к Солнцу, когда в России:
1) зима,
2) лето.
3) Расстояние от Земли до Солнца всегда одинаково.

в) На экваторе Земли ночь всегда:
1) длится половину суток,
2) короче половины суток,
3) длиннее половины суток.

г) Количество звёзд в нашей Галактике:
1) больше 100 млрд.,
2) примерно 1 млрд.,
3) меньше 1 млн.

д) Свет проходит расстояние от самой далёкой из обнаруженных галактик до Солнца:
1) за 2 млн. лет, 2) за 13 млрд. лет, 3) за 85 трлн. лет.

е) Если бы Земля завращалась вокруг своей оси с той же скоростью в противоположном направлении относительно неподвижных звёзд, то солнечные сутки:
1) стали бы короче, 2) стали бы длиннее, 3) остались бы теми же.

ж) Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия Солнце—Земля примерно равна по абсолютной величине:
1) половине кинетической энергии движения Земли вокруг Солнца,
2) кинетической энергии движения Земли вокруг Солнца,
3) удвоенной кинетической энергии движения Земли вокруг Солнца.

2. Пусть чёрная дыра представляет собой точечный объект, гравитационное поле которого будем описывать классическим ньютоновым законом тяготения. На чёрную дыру с массой $M = 1$ млн. масс Солнца свободно падает ракета с отключенными двигателями. Сможет ли космонавт перенести перегрузки на расстоянии так называемого горизонта событий $r = 2GM/c^2$? Здесь $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2) — гравитационная постоянная, $c = 300$ тыс. км/с —скорость света, масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

3. Какой должна быть мощность излучения фотонной ракеты с массой 1 тонна, чтобы оторваться от стартовой площадки на поверхности Земли? Энергия фотона E связана с его импульсом p соотношением $E = pc$, где $c = 300$ тыс. км/с — скорость света. Ускорение свободного падения на поверхности Земли 10 м/с^2.

4. Посередине между Землёй и далёким квазаром оказалась массивная эллиптическая галактика (все три объекта находятся на одной прямой). Своим гравитационным полем галактика отклоняет лучи света от квазара, проходящие мимо неё. В результате наблюдаемое изображение галактики окружено кольцом с диаметром 6 угловых секунд (кольцо образуют лучи от квазара, отклонённые эллиптической галактикой). Оцените массу эллиптической галактики в единицах массы Солнца, если Солнце способно отклонить лучи на 1,75 угловых секунды. Радиус Солнца 700 000 км, радиус эллиптической галактики 50 кпк, 1 пк $= 3 \cdot 10^{13}$ км.

Решение задач 8–9 классов

1. а) 1) 4 октября 1957 года в СССР.

б) 2) Нил Армстронг.

в) 3) На части России летом. За северным полярным кругом Солнце не заходит за горизонт и в «полночь» летнего полярного дня находится в северном направлении.

г) 1) Зимой в Нижегородской области.

д) 1) Примерно в 100 раз.

е) 2) Примерно за 3 секунды.

ж) 3) На восток. Спутник следует запускать в сторону вращения Земли.

2. Если точки максимального отклонения маятника медленно вращаются по часовой стрелке (если смотреть на них сверху), то находимся в северном полушарии. Если против часовой стрелки — в южном.

Строго на северном или южном полюсе вертикальная плоскость качания маятника остаётся неподвижной относительно звёзд и Солнца (а Земля вращается под маятником). На промежуточных широтах плоскость качания маятника смещается относительно звёзд, но в северном полушарии направление её вращения относительно земли остаётся таким же, как на северном полюсе (в южном полушарии — как на южном полюсе). Таким образом, в северном полушарии точки максимального отклонения маятника вращаются в том же направлении, что и Солнце (или вершина тени от шеста) — по часовой стрелке, если смотреть на них сверху. В южном полушарии — против часовой стрелки.

3. В 3,5 раза.

Земля затеняет в космическом пространстве область в виде конуса. Боковая поверхность конуса образована лучами, распространяющими от края Солнца и проходящими по краю освещённой области на поверхности Земли. Поскольку Солнце много больше Земли, то вершина конуса находится практически сразу же за Землёй (по сравнению с расстоянием до Солнца). Угол раскрыва конуса в точности равен угловому размеру Солнца, видимого из вершины конуса, что практически совпадает с видимым угловым размером Солнца на Земле $\theta \ll 1$. Диаметр поперечного сечения конуса монотонно уменьшается с удалением от Солнца за орбиту Земли как $D_З - \theta L$, где $D_З$ — диаметр Земли, L — расстояние от Земли. Следовательно, на орбите Луны диаметр земной тени достигает величины $D_З - \theta L_{З\text{-}Л}$, где $L_{З\text{-}Л}$ — расстояние от Земли до Луны. Однако видимый угловой размер Луны $D_Л/L_{З\text{-}Л}$ совпадает с угловым размером Солнца θ (о чём свидетельствует совпадение краёв тел во время солнечного затмения); $D_Л$ — диаметр Луны. Тогда произведение $\theta L_{З\text{-}Л} = D_Л$, и радиус тени на орбите Луны равен $D_З - D_Л$, что составляет $2{,}5D_Л$ согласно наблюдениям во время лунного затмения. Из равенства $D_З - D_Л = 2{,}5D_Л$ находим $D_З = 3{,}5D_Л$.

4. а) 8 лет, б) 5 раз.

а) Поскольку Земля должна вернуться в исходную точку своей орбиты, то искомый период равен целому числу N земных лет. По условию задачи период обращения Венеры вокруг Солнца составляет 8/13 земного года. Поэтому за время N земных лет Венера совершит $N/(8/13)$ оборотов, которое должно быть некоторым целым числом K. Получаем уравнение $8/13 = N/K$ на целые числа N и K. Решения этого уравнения $N = 8m$ и $K = 13m$ (где $m = 1, 2, 3, \ldots$) определяют интервалы времени в земных и венерианских годах, через которые система возвращается в исходное состояние. Искомый период соответствует минимальному решению с $m = 1$ и равен 8 земным годам.

б) Минимальное расстояние между планетами достигается в моменты, когда Венера пересекает отрезок Солнце—Земля. Пусть после очередного сближения планет Земля совершила Q оборотов (не обязательно полных). За то же время Венера совершает $Q/(8/13)$ оборотов. Чтобы Венера вновь попала на отрезок Солнце—Земля, число оборотов Венеры $Q/(8/13)$ должно отличаться от числа оборотов Земли Q на некоторое целое число p. Получаем уравнение $Q/(8/13) - Q \equiv 5Q/8 = p$ на целое число p и не обязательно целое число оборотов Земли Q. Это уравнение определяет время в виде числа оборотов Земли $Q = 8p/5$ (где $p = 1, 2, 3, \ldots$), когда Венера вновь оказывается на минимальном расстоянии от Земли. Сближения планет происходят через каждые 8/5 оборота Земли — через 8/5 лет. Тогда за период 8 лет, найденный в первой части задачи, планеты сблизятся на минимальное расстояние (8 лет)/(8/5 года) = 5 раз.

Пятиконечную звезду (пентакл) иногда называют звездой Венеры (см., например, книгу Дэна Брауна «Код да Винчи»). Эта связь обусловлена пятью медленно перемещающимися в пространстве (и на небесной сфере) точками, в которых Венера подходит на минимальное расстояние к Земле, — так называемыми точками внутреннего соединения планет. См. рисунки точек сближения на страницах:

en.wikipedia.org/wiki/File:Venus_pentagram.png

www.lunarplanner.com/HCpages/Venus.html

или анимацию

www.youtube.com/watch?v=4nI3Ky8mhj8.

Моменты сближения (и максимального удаления) планет приближённо соответствуют моментам, когда видимое угловое расстояние между Солнцем и Венерой минимально. Ближайшее внутреннее соединение планет произойдёт 6 июня 2012 года и будет сопровождаться прохождением Венеры по диску Солнца. Следующее прохождение Венеры по диску Солнца произойдёт более чем через 100 лет.

Решение задач 10 класса

1. а) 3) На части России летом. За северным полярным кругом Солнце не заходит за горизонт и в «полночь» летнего полярного дня находится в северном направлении.

б) 1) Зимой в Нижегородской области.

в) 2) Короче половины суток. Ночь занимает время, когда Солнце полностью находится за горизонтом (его не видно). На экваторе центр Солнца находится под горизонтом половину суток (даже чуть меньше из-за преломления лучей в атмосфере, как в стекле). Естественно, вечером верхний край Солнца заходит за горизонт позднее, чем центр Солнца. В свою очередь, утром верхний край Солнце появляется над горизонтом раньше, чем центр светила. В результате Солнце целиком находится за горизонтом меньшее время, чем его центр, — меньше половины суток.

г) 1) В 330 000 раз.

д) 3) За 4 года.

е) 3) На восток. Спутник следует запускать в сторону вращения Земли.

ж) 2) 16,6 км/с. Тело необходимо запускать в сторону движения Земли вокруг Солнца.

2. (1 год)/$\sqrt{2} \approx$ 8,5 месяцев.

Объекты продолжат вращение вокруг общего центра масс, который уже будет находиться не в Солнце, а посередине между Солнцем и Землёй. Соответственно, радиус орбиты Земли (измеряемый от центра вращения) уменьшится в два раза. В свою очередь, центростремительное ускорение Земли останется прежним: сила гравитационного притяжения к Солнцу увеличится пропорционально гравитационной массе Земли, однако инерционная масса Земли увеличится во столько же раз.

Земля совершает оборот по окружности радиуса r со скоростью v за время $T = 2\pi r/v$. В свою очередь, центростремительное ускорение Земли $a = v^2/r$, что даёт выражение для скорости $v = \sqrt{ar}$. Подставляем его в выражение для периода: $T = 2\pi\sqrt{r/a}$. Видно, что уменьшение радиуса вращения в два раза при сохранении величины центростремительного ускорения приводит к уменьшению периода вращения в $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ раз. Период обращения Земли станет равным (1 год)/$\sqrt{2} \approx$ 8,5 месяцев.

3. Ответ: 9,6 м.

В полдень на участок площади S за время t падает излучение с энергией $E = JSt$, где $J = 1{,}4$ кВт/м^2. Ночью Солнце заходит за горизонт и мощность падающего излучения падает до нуля. Поэтому энергия падающего излучения, усреднённая за $t = 1$ год по дням и ночам, составляет величину порядка $\langle E\rangle = JSt/2$ (более строго JSt/π).

Объём столба воды высотой h, испарившейся с той же площадки, составит $V = Sh$, а его масса $m = \rho V = \rho Sh$, где $\rho = 1\,000$ кг/м^3 — плотность воды. Для испарения воды потребуется энергия $Q = \lambda m = \lambda\rho Sh$, где $\lambda = 2{,}3$ МДж/кг.

Приравнивая, $Q = \lambda\rho Sh$ и $\langle E\rangle = JSt/2$ находим высоту столба $h = Jt/(2\lambda\rho) = 1\,400\,\cdot$

$(365 \cdot 24 \cdot 3600)/(2 \cdot 2\,300\,000 \cdot 1000)$ м $\approx 9{,}6$ м.

4. Больше 14 км/с.

Ускорение свободного падения на расстоянии r от центра Земли определяется веществом, находящимся внутри сферы радиуса r (согласно указанию в задаче, гравитационное притяжение от внешних слоёв взаимно компенсируется и равно нулю). Объём шара радиуса r пропорционален r^3. Полагаем плотность Земли однородной. Тогда масса M вещества в сфере радиуса r внутри Земли также пропорциональна r^3 — $M = \alpha r^3$, где α — некоторая постоянная.

Согласно ньютонову закону тяготения, ускорение свободного падения a на расстоянии r пропорционально массе $M = \alpha r^3$ и обратно пропорционально r^2 — $a = GM/r^2 = \alpha G r$, где G — гравитационная постоянная. На поверхности Земли (при $r = R_З$) ускорение свободного падения $a = \alpha G r$ достигает известной величины $g = 10$ м/с^2, что определяет фактор $\alpha G = g/R_З$, где $R_З = 6\,400$ км — радиус Земли. Таким образом, внутри Земли $a = gr/R_З$, и на ядро массы m действует сила притяжения $F = ma = mgr/R_З$. Эта сила пропорциональна удалению r от центра Земли и поэтому эквивалента силе $F = kr$ пружины с коэффициентом жёсткости $k = mg/R_З$.

Таким образом, при движении ядра от центра Земли до поверхности планеты сила тяготения совершает работу A_1 над ядром, равную работе эквивалентной пружины при её растяжении из невозмущённого состояния до длины $r = R_З$ — $A_1 = -kR_З^2/2 = -mgR_З/2$.

При дальнейшем полёте ядра с поверхности планеты на бесконечное расстояние гравитация совершает над ним работу A_2, равную потенциальной энергии ядра на поверхности Земли $U = -GmM_З/R_З$ (которая совпадает с энергией взаимодействия двух точечных масс на расстоянии $r = R_З$). Здесь $M_З$ — масса Земли. Вместе с тем ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = GM_З/R_З^2$, что даёт фактор $GM_З = gR_З^2$. Подставляем его в выражение для работы $A_2 = -GmM_З/R_З = -mgR_З$.

В итоге при движении ядра из центра Земли на бесконечное удаление от планеты гравитация совершает над ядром работу $A = A_1 + A_2 = -mgR_З/2 - mgR_З = -3mgR_З/2$, и кинетическая энергия ядра уменьшается до величины $K = mv_0^2 + A = mv_0^2/2 - 3mgR_З/2$, где v_0 — искомая начальная скорость ядра в центре Земли. Кинетическая энергия K должна быть положительной, что ограничивает снизу начальную скорость ядра: $v_0 > \sqrt{3gR_З} = \sqrt{3 \cdot 10 \cdot 6\,400 \cdot 1\,000}$ м/с ≈ 14 км/с.

Решение задач 11 класса

1. а) 3) На части России летом. За северным полярным кругом Солнце не заходит за горизонт и в «полночь» летнего полярного дня находится в северном направлении.

б) 1) Зима.

в) 2) Короче половины суток. Ночь занимает время, когда Солнце полностью находится за горизонтом (его не видно). На экваторе центр Солнца находится под горизонтом половину суток (даже чуть меньше из-за преломления лучей в атмосфере, как в стекле). Естественно, вечером верхний край Солнца заходит за горизонт позднее, чем центр Солнца. В свою очередь, утром верхний край Солнце появляется над горизонтом раньше, чем центр светила. В результате Солнце целиком находится за горизонтом меньшее время, чем его центр, — меньше половины суток.

г) 1) Больше 100 млрд.

д) 2) За 13 млрд. лет.

е) 1) Стали бы короче.

ж) 3) Удвоенной кинетической энергии движения Земли вокруг Солнца. По второму закону Ньютона $M_З a = GM_З M_\odot / r^2$, где G — гравитационная постоянная, $M_З$ — масса Земли, $M_\odot$ — масса Солнца, r — радиус орбиты Земли. Центростремительное ускорение Земли на круговой орбите $a = v^2/r$, где v — скорость движения Земли. Получаем $M_З v^2/r = GM_З M_\odot/r^2$, и, следовательно, потенциальная энергия $GM_З M_\odot/r = 2\,(M_З v^2/2)$.

2. Сможет.

Если бы ускорение свободного падения было однородным в пространстве, то все части тела космонавта падали бы с одинаковым ускорением, и он не испытывал каких-либо перегрузок (или растяжений). Сила гравитационного притяжения к чёрной дыре неоднородна в пространстве, поэтому разные части тела космонавта стремятся падать с разным ускорением. Поэтому соединительные элементы (кости, связки и пр.) должны создавать внутренние силы, которые заставят разные части тела падать с одинаковым ускорением. Максимальное возможное растяжение космонавта определяется разностью ускорений свободного падения на характерной высоте человека $L = 2$ м — $\Delta g = GM/r^2 - GM/(r+L)^2 = GM\,[(r+L)^2 - r^2]/[r^2\,(r+L)^2] = GM\,L\,(2r+L)/[r^2\,(r+L)^2] \approx 2GML/r^3$, где r — расстояние до чёрной дыры, $M = 10^6 M_\odot$ — масса чёрной дыры, $M_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца, G — гравитационная постоянная. На расстоянии $r = 2GM/c^2$ горизонта событий ($c = 300$ тыс. км/с —скорость света) рассматриваемая разность ускорений $\Delta g = 2GML/(2GM/c^2)^3 = c^6 L/(GM)^2 = (300\,000\cdot 1000)^6\cdot 2/[6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot(10^6\cdot 2\cdot 10^{30})]^2 = 0{,}08$ м/с. Такое растяжение по порядку величины в 100 раз меньше, чем если бы космонавт повис на турнике. Ясно, что такую малую «перегрузку» космонавт перенесёт.

Обратим внимание, что растяжение космонавта на горизонте событий увеличивается с уменьшением массы чёрной дыры: $\Delta g \propto 1/M^2$. Перегрузки будут невыносимы при падении на чёрную дыру звёздной массы ($M \sim M_\odot$).

3. Больше $3 \cdot 10^{12}$ Вт = 3 ТВт.

Пусть двигатель испустил N фотонов за время t. Фотоны уносят импульс $P = pN$ и придают ракете соответствующий импульс $P_\uparrow = pN$, направленный вверх (p — импульс одного фотона). В свою очередь, земное притяжение сообщает ракете импульс $P_\downarrow = mgt$, направленный вниз ($m = 1$ т — масса ракеты, $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения на поверхности Земли). Чтобы ракета оторвалась от стартовой площадки, импульс тяги $P_\uparrow = pN$ должен превысить импульс $P_\downarrow = mgt$, что налагает ограничение снизу на силу тяги $F = pN/t > mg$. Умножаем последнее неравенство на скорость света c, что даёт искомую мощность излучения ракеты $W = pcN/t = EN/t$ в левой части неравенства, где $E = pc$ — энергия одного фотона, и ограничение $W > mgc = 1000 \cdot 10 \cdot (300\,000 \cdot 1000)$ Вт = $3 \cdot 10^{12}$ Вт = 3 ТВт.

Требуемая мощность фотонного двигателя превышает мощность (22 ГВт) наиболее крупной в мире электростанции «Три ущелья» в Китае. Вместе с тем, наиболее мощные лазеры (например, в Институте прикладной физики РАН) создают короткие импульсы излучения с существенно большей мощностью порядка 1 ПВт = 10^{15} Вт, однако длительность импульсов ничтожна.

Огромная мощность фотонной ракеты по сравнению с «традиционной» жидкостной или твердотельной обусловлена тем, что при одинаковом силе тяги F (одинаковом импульсе $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = F$ выбрасываемого «вещества» (газов или фотонов) в единицу времени) кинетическая энергия выбрасываемого вещества K и мощность ракеты W увеличиваются примерно пропорционально скорости v вещества: $K = Pv/2 \sim Pv$ при $v \ll c$ и $K \approx Pv$ при $v \approx c$; $W = \mathrm{d}K/\mathrm{d}t \sim Fv$. В обычной ракете скорость v выбрасываемого вещества существенно меньше, чем в фотонной ракете.

4. Ответ: $7 \cdot 10^{12}$.

Пусть галактика преломляет лучи на угол θ. Тогда лучи, образующие кольцо, выходят от квазара под углом $\theta/2$ к оси Земля—квазар, около эллиптической галактики преломляются на угол θ и далее подходят к наблюдателю под углом $\theta/2$ к направлению Земля—квазар. Диаметр кольца равен $2 \cdot (\theta/2) = \theta$ и по условию задачи составляет $6''$.

При рассматриваемых малых углах отклонения (много меньше $90°$) свет распространяется практически по прямой в гравитационных полях галактики и Солнца. В свою очередь, полагаем гравитационные поля эллиптической галактики и Солнца совпадающими с полям точечных масс (на трассах распространения света, касающихся внешних границ этих объектов). Тогда гравитационные поля, проходимые светом вблизи галактики и Солнца взаимно подобны.

Будем рассматривать излучение как поток некоторых частиц — фотонов, имеющих импульс p. В силу подобия гравитационных полей изменение Δp импульса фотона для каждого объекта пропорционально ускорению свободного падения в точке максимального сближения с притягивающим телом $g = Gm/r^2$ и характерному времени прохождения области гравитационного поля $\tau = r/c$: $\Delta p = \alpha g \tau = \alpha Gm/(rc)$, где α — некоторая константа, G — гравитационная постоянная, c — скорость света, m — масса притягивающего тела, r — радиус тела. При малых углах отклонения изменение импульса направлено практически перпендикулярно начальному импульсу фотона, так что угол отклонения $\vartheta = \Delta p/p \propto m/r$.

Получаем, что отношение углов $\theta = 6''$ и $\theta_\odot = 1{,}75''$ отклонения света в полях галактики и Солнца пропорционально отношению масс M и $M_\odot$ этих объектов и обратно пропорционально отношению их радиусов $R = 100$ кпк и $R_\odot = 700\,000$ км: $\theta/\theta_\odot = (M/M_\odot)\,(R_\odot/R)$. Отсюда находим искомую массу галактики в единицах массы Солнца: $M/M_\odot = (\theta/\theta_\odot)\,(R/R_\odot) = [6/1{,}75]\,[(50 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 10^{13})/(700\,000)] = 7 \cdot 10^{12}$.